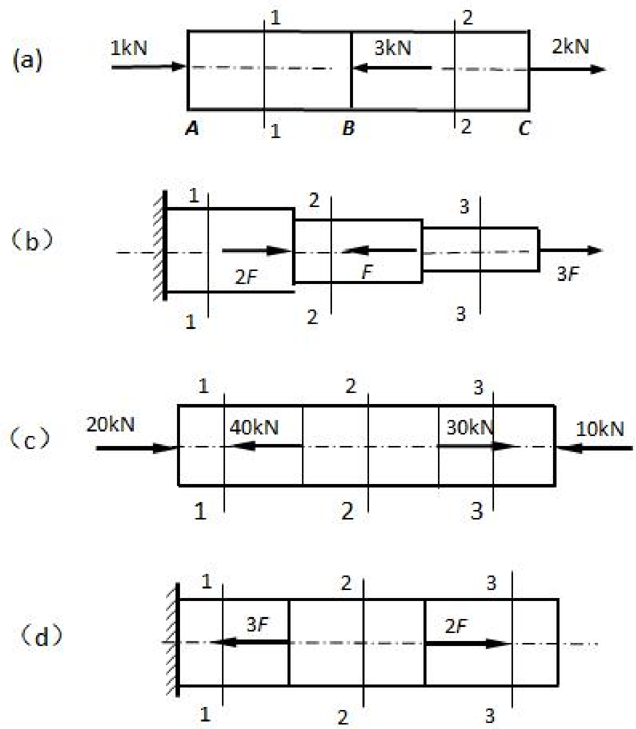
第二章 轴向拉伸与压缩

1、求图示各杆 1－1、 2－2 和 3－3 截面上的轴力。



解：

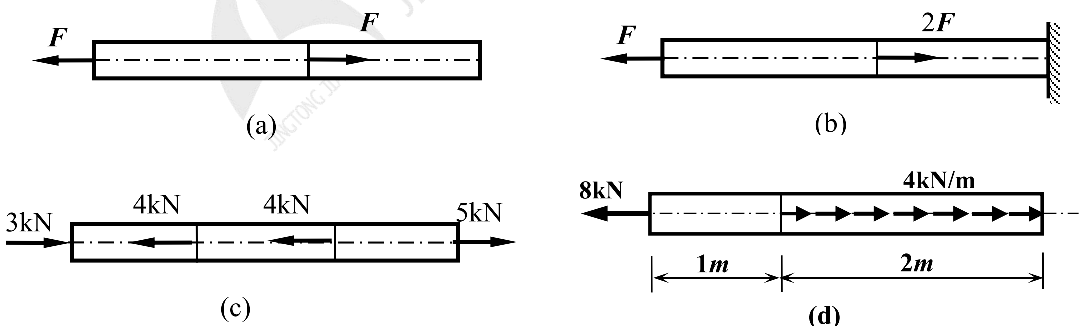
（a）N_1= －1kN，　　N_2= 2kN 。

（b）N_1= 4F，　　N_2=2F ，　　N_3= 3F。

（c）N_1= －20kN，　N_2= 20kN，　N_3= －10kN 。

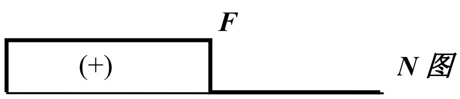
（d）N_1= －F，　　N_2=2F，　　N_3= 0。

2、 画各杆的轴力图。

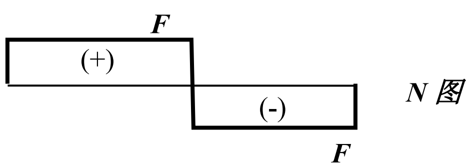


参考答案：

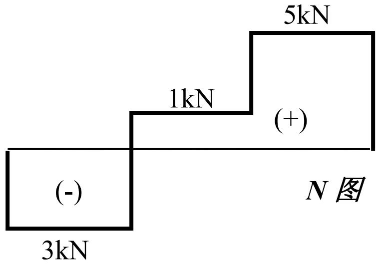
解：(a)



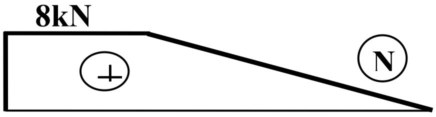
(b)



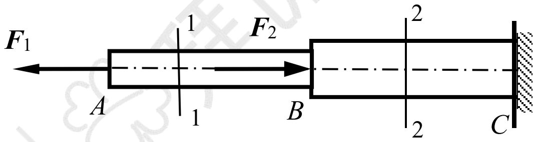
(c)



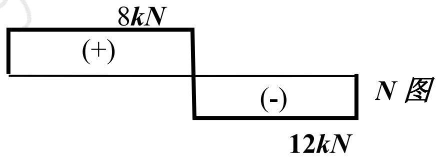
（d）



3、图示变截面直杆，已知 F_1=8kN，F_2=20kN，若 AB 段的横截面面积 A_1=100mm^2，BC 段的横截面面积 A_2=200mm^2，求杆件中的最大拉应力和最大压应力。



解：(1) 作杆件的轴力图



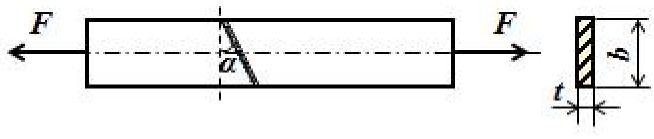
(2) AB 段有最大拉应力

$$\sigma_{t,\max} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{8\times10^3}{100} = 80MPa$$

（3）BC 段有最大压应力

$$\sigma_{c,\max} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{12\times10^3}{200} 60MPa$$

4、图示由斜焊缝焊接而成的钢板受拉力 F 作用。已知：F=20kN，b=200mm，t=10mm，α =30o。试求焊缝内的应力。



解：先计算横截面上的应力

$$s = \frac{N}{A} = \frac{F}{bt} = \frac{20´\ 10^3}{0.2´\ 0.01} = 10MPa$$

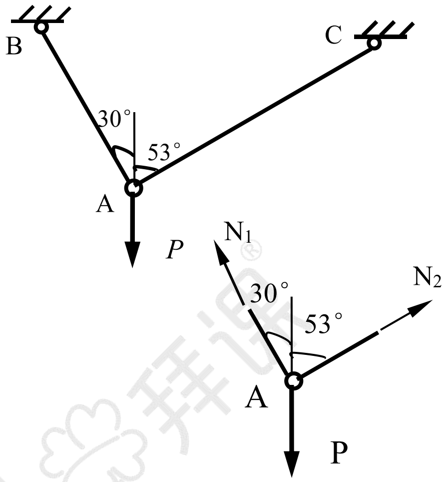
再用斜截面应力公式计算要求的应力

$$\sigma_{30^\circ} = \sigma\cos^2\alpha = 10\times\cos^2 30^\circ = 7.5MPa$$

$$\tau_{30^\circ} = \frac{1}{2}\sigma\sin 2\alpha = \frac{1}{2}\times 10\times\sin(2\times 30^\circ) = 4.33MPa$$

即焊缝处的正应力为 7.5MPa，切应力为 4.33MPa。

5、图示桁架，已知 P=800N，杆 AB 和 BC 的横截面均为圆形，直径分别为 10mm 和 8mm，试求两杆中的正应力。



解：（1）计算两杆轴力

由节点 A 的平衡可知：

$$\sum X = -N_1\sin 30^\circ + N_2\sin 53^\circ = 0$$

$$\sum Y = N_1\cos 30^\circ + N_2\cos 53^\circ - P = 0$$

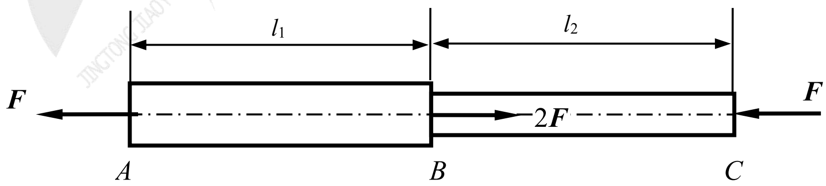
$$\therefore \begin{aligned} N_1 &= 0.8P \\ N_2 &= 0.5P \end{aligned}$$

（2）求两杆的应力

$$\sigma_{AB} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0.8\times 800}{\pi\times 10^2/4} = 8.15\text{MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0.5\times 800\times 4}{\pi\times 8^2} = 7.96MPa$$

6、 图示阶梯形杆 AC，F=10 kN，l_1= l_2=400 mm，A_1=2A_2=100 mm^2，E=200GPa，试计算杆 AC 的轴向变形Δl。



解：(1) 用截面法求 AB、BC 段的轴力；

$$\boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{F} \qquad \text{N}_2 = -\boldsymbol{F}$$

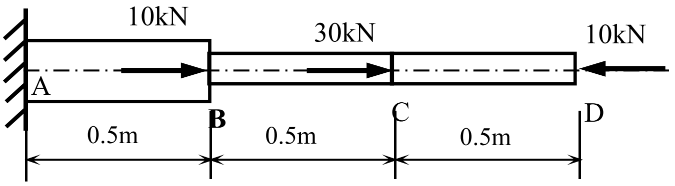
(2) 分段计算个杆的轴向变形；

$$\Delta \boldsymbol{l} = \Delta \boldsymbol{l}_1 + \Delta \boldsymbol{l}_2 = \frac{\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{l}_1}{\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}_1} + \frac{\boldsymbol{N}_2\boldsymbol{l}_2}{\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}_2} = \frac{10\times 10^3\times 400}{200\times 10^3\times 100} - \frac{10\times 10^3\times 400}{200\times 10^3\times 50}$$

$$= -0.2\ \boldsymbol{mm}$$

7、已知图示拉压杆，A_1=500mm^2，A_2＝200mm^2， E=200GPa，试：

1）作出杆件的轴力图； 2）求各段的正应力； 3）求杆件的总变形量。



解：1）

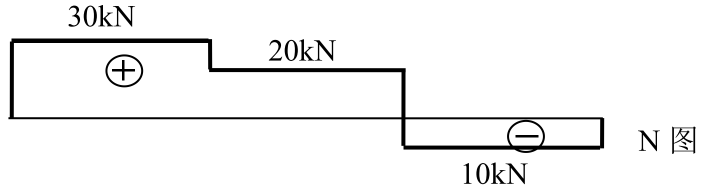
杆件各段的轴力分别为：

N_{AB}=30kN（拉）

N_{BC}=20kN

N_{CD}=—10kN（压）

轴力图如右。



2）各段正应力分别为：

$$\sigma_{AB}=\frac{N_{AB}}{A_{AB}}=\frac{30\times10^3}{500}=6$$

$$\sigma_{BC}=\frac{N_{BC}}{A_{BC}}=\frac{20\times10^3}{200}=100MPa$$

$$\sigma_{CD}=\frac{N_{CD}}{A_{CD}}=\frac{-10\times10^3}{200}=-50MPa$$

3）杆件的总变形为：

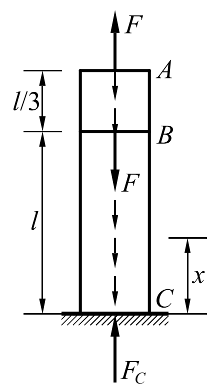
$$\Delta l_{AD}=\frac{N_{AB}l_{AB}}{EA_{AB}}+\frac{N_{BC}l_{BC}}{EA_{BC}}+\frac{N_{CD}l_{CD}}{EA_{CD}}$$

$$=\frac{30\times10^3\times500}{200\times10^3\times500}+\frac{(20-10)\times10^3\times500}{200\times10^3\times200}=0.275mm$$

8、图示等直杆，已知载荷 F，BC 段长 l，横截面面积 A，弹性模量 E，质量密度ρ，考虑自重影响。试求截面 B 的位移。

解：由整体平衡得 $F_C=\frac{4}{3}\rho gAl$

***BC* 段轴力** $\mathrm{N}(x)=\rho gA\left(x-\frac{4}{3}l\right)$



截面 *B* 的位移

$$\varDelta_B=\Delta l_{BC}=\int_0^l\frac{\mathrm{N}(x)\mathrm{d}x}{EA}$$

$$=\int_0^l\frac{\rho gA\left(x-\frac{4}{3}l\right)}{EA}\mathrm{d}x=-\frac{5\rho gl^2}{6E}\quad(\downarrow)$$

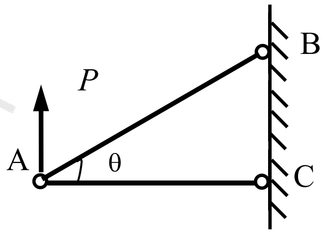
9、一根截面边长为 20mm，杆长为 4m 的的正方形截面杆件，承受轴向拉力 F=30kN，其伸长量 Δl=2mm 。已知材料的许用应力[σ]=160Mpa。求材料的弹性模量并校核杆件的强度。

解：$\Delta l=\dfrac{Nl}{EA}=\dfrac{30\times10^3\times4000}{E\times20^2}=1.5mm$　　E=200GPa

$$\sigma=\frac{N}{\mathrm{A}}=\frac{30\times10^3}{20^2}=150\mathrm{MPa}<[\sigma]$$

故强度满足。

10、在图示结构中，AB 和 AC 两杆的材料相同，横截面面积相同，均为 A，且$[\sigma]_c=2[\sigma]_t$，求杆系的承载能力最大时两杆的夹角θ。



解：由节点平衡分析可知

$$N_{AC}=\frac{P}{\tan\theta}\qquad（拉力）$$

$$N_{AB}=\frac{P}{\sin\theta}\qquad（压力）$$

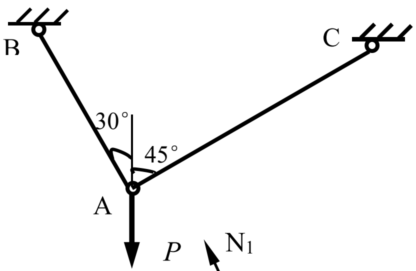
杆系的承载能力最大时，两杆同时失效，即

$$\sigma_{\mathrm{AC}}=\frac{N_{AC}}{\mathrm{A}}=\frac{P}{\mathrm{A}\tan\theta}=[\sigma_{\mathrm{t}}]$$

$$\sigma_{\mathrm{AB}}=\frac{N_{AB}}{\mathrm{A}}=\frac{P}{\mathrm{A}\sin\theta}=[\sigma_{\mathrm{c}}]$$

$$\theta=\arccos\frac{1}{2}=60^\circ$$

11、图示桁架，在 A 点作用竖直向下的力 P=80kN。已知杆 AB 的直径 d_1=30mm，$[\sigma]_1$=120MPa；杆 AC 的直径 d_2=20mm，$[\sigma]_2$=150MPa，试校核桁架的强度。

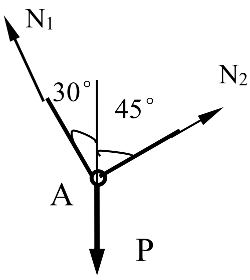


解：（1）由节点 A 的平衡可知：

$$\sum X=-N_1\sin30^\circ+N_2\sin45^\circ=0$$

$$\sum Y=N_1\cos30^\circ+N_2\cos45^\circ-P=0$$

$$\therefore\ \begin{aligned}N_1&=0.73P\\N_2&=0.52P\end{aligned}$$



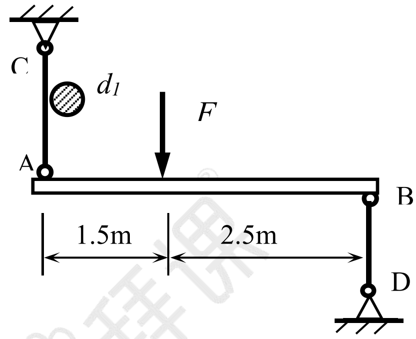
（2）强度计算

$$\sigma_{\mathrm{AB}}=\frac{N_1}{A_1}=\frac{4N_1}{\pi d^2}=\frac{4\times0.73\times80\times10^3}{\pi\times30^2}=82.7MPa<[\sigma]$$

$$\sigma_{AC}=\frac{N_2}{A_2}=\frac{4N_2}{\pi d_2^{\ 2}}=\frac{4\times0.52\times80\times10^3}{\pi\times20^2}=132.5MPa<[\sigma]$$

故桁架的强度满足。

12、图示结构中，AB 为刚性杆件，杆 AC 为钢杆，$\sigma_{u\,钢}$=680MPa，直径 d_1=20mm；杆 BD 为铝杆，$\sigma_{u\,铝}$=70MPa，横截面面积为 A_2=1800mm²。结构的安全系数 n=2。试确定结构的许用荷载[F]。



解：（1）计算两杆的轴力

由 AB 杆的平衡可得

$$N_{AC}=0.625F \qquad N_{BD}=0.375F$$

（2）由 $[\sigma]=\dfrac{\sigma_u}{n}$

$$[\sigma]_1=\frac{\sigma_{u钢}}{2}=340\text{MPa} \qquad [\sigma]_2=\frac{\sigma_{u铝}}{2}=35\text{MPa}$$

（3）两杆的许用轴力

$$N_{1\max}=A_1[\sigma]_1=\frac{\pi\times20^2}{4}\times340=106.8\text{kN}$$

$$N_{2\max}=A_2[\sigma]_2=1800\times35=63\text{kN}$$

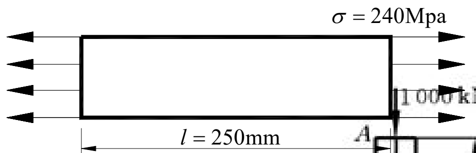
（4）确定结构的许可荷载

由 AC 杆强度确定：$[F]_1=\dfrac{N_{1,\max}}{0.625}=170.9\text{kN}$

由 BD 杆强度确定：$[F]_2=\dfrac{N_{2,\max}}{0.375}=168\text{kN}$

综上，结构的许用荷载[F]=168kN。

13、如下图所示，等直钢杆均匀拉伸，已知钢的弹性模量 E=200GPa，杆的总伸长量$\triangle l$＝5mm，求此时杆的塑性伸长量。

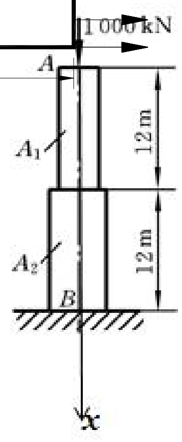


解：由题知，$\varepsilon=\dfrac{\sigma}{E}=\dfrac{240}{200\times10^3}=0.0012$

弹性伸长量：$\Delta l_e=l\varepsilon=0.0012\times250=0.3mm$

塑性伸长量：$\Delta l_p=\Delta l-\Delta l_e=5-0.3=4.7mm$

14、已知混凝土的密度 ρ=2.25×103kg/m³，许用压应力[σ]=2MPa。试



按强度条件确定图示混凝土柱所需的横截面面积 A_1 和 A_2。若混凝土的弹性模量 E=20GPa，试求柱顶 A 的位移。

解：混凝土柱各段轴力分别为：

$$N_1 = -F - \rho g A_1 x \qquad N_2 = -F - \rho g A_1 l_1 - \rho g A_2 (x - l_1)$$

混凝土柱各段危险截面分别为柱中截面和柱底截面，其轴力分别为：

$$N_{1\max} = F + \rho g A_1 l_1 \qquad N_{2\max} = F + \rho g (A_1 l_1 + A_2 l_2) \text{ (受压)}$$

由强度条件：$\dfrac{N_{\max}}{A} \le [\sigma]$

$$A_1 \ge \frac{F}{[\sigma] - \rho g l_1} = \frac{1000 \times 10^3}{2 \times 10^6 - 2.25 \times 10^3 \times 9.8 \times 12}(m^2) = 0.576m^2$$ 取 $A_1=0.576m^2$

$$A_2 \ge \frac{F + \rho g A_1 l_1}{[\sigma] - \rho g l_2} = \frac{1000 \times 10^3 + 2.25 \times 10^3 \times 9.8 \times 12 \times 0.576}{2 \times 10^6 - 2.25 \times 10^3 \times 9.8 \times 12}(m^2) = 0.664m^2$$

取 $A_2=0.664m^2$

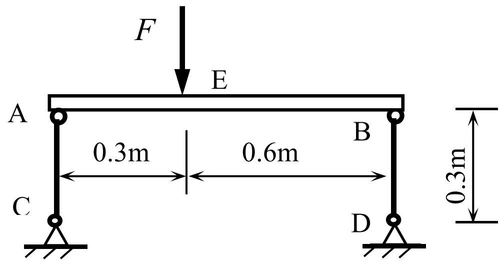
柱底固定，则柱顶位移值等于柱的伸缩量，可用叠加原理计算：

$$\Delta_A = \Delta l = \sum \Delta l_i = \sum \int_{l_i} \frac{N_i dx}{EA_i} = \frac{Fl_1}{EA_1} + \frac{\rho g l_1^2}{2E} + \frac{(F + \rho g A_1 l_1) l_2}{EA_2} + \frac{\rho g l_2^2}{2E}$$

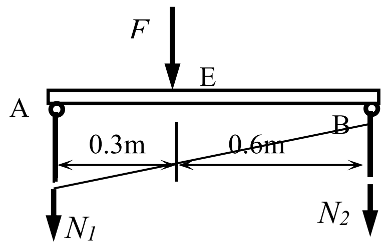
$$= \frac{1000 \times 10^3 \times 12}{20 \times 10^9 \times 0.576} + \frac{2.25 \times 10^3 \times 9.8 \times 12 \times 12}{2 \times 20 \times 10^9}$$

$$+ \frac{(1000 + 2.25 \times 9.8 \times 0.576 \times 12) \times 10^3 \times 12}{20 \times 10^9 \times 0.664} + \frac{2.25 \times 10^3 \times 9.8 \times 12 \times 12}{2 \times 20 \times 10^9} = 2.242mm$$

15、 图示所示结构，杆 AB 为刚性杆。杆 AC 为为圆截面钢杆，E_1=200GPa，直径 d_1=20mm；杆 BD 杆为圆截面铝杆，E_1=70GPa，直径 d_1=40mm；竖直力 F=90kN。试求杆 AB 上点 E 的竖向位移。



解：（1）求两杆的轴力



$$\boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2 + \boldsymbol{F} = 0$$

$$\boldsymbol{N}_1 \times 0.3 = \boldsymbol{N}_2 \times 0.6$$

$$\boldsymbol{N}_1 = 60\text{kN} \qquad \boldsymbol{N}_2 = 30\text{kN}$$

（2）求两杆的变形

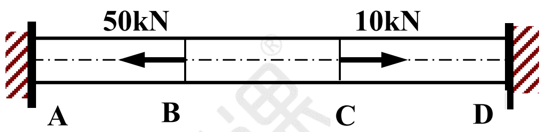
$$\Delta l_1=\frac{N_1l_1}{E_1A_1}=\frac{60\times10^3\times0.3\times10^3\times4}{200\times10^3\times\pi\times20^2}=0.287mm$$

$$\Delta l_2=\frac{N_2l_2}{E_2A_2}=\frac{30\times10^3\times0.3\times10^3\times4}{70\times10^3\times\pi\times40^2}=0.102mm$$

（3）点 E 的位移

$$\Delta_E=\Delta l_2+\frac{2\left(\Delta l_1-\Delta l_2\right)}{3}=0.225mm$$

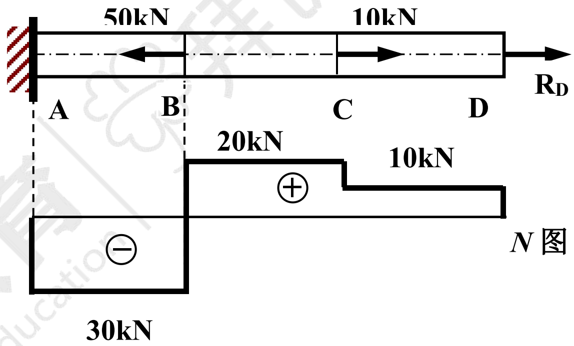
16、已知图示拉压杆，杆件横截面面积 A=400mm²，AB、BC、CD 段杆长相等，均为 1m，材料的弹性模量 E=200GPa，求：1）求 D 支座反力；2）作出杆件的轴力图；3）求杆件各段的正应力。



解：1）一次超静定结构

（1）去右端支座，用未知力 R_D 代替

（2）各段杆件的轴力



$$N_{AB}=R_D+10-50=R_D-40$$

$$N_{BC}=R_D+10$$

$$N_{CD}=R_D$$

（3）变形协调条件

$$\Delta l_{AD}=\Delta l_{AB}+\Delta l_{BC}+\Delta l_{CD}=0 \text{ 即 } \Delta l_{AD}=\frac{N_{AB}l_{AB}}{EA}+\frac{N_{BC}l_{BC}}{EA}+\frac{N_{CD}l_{CD}}{EA}=0$$

联立以上解得 $R_D=10kN$

2）作轴力图

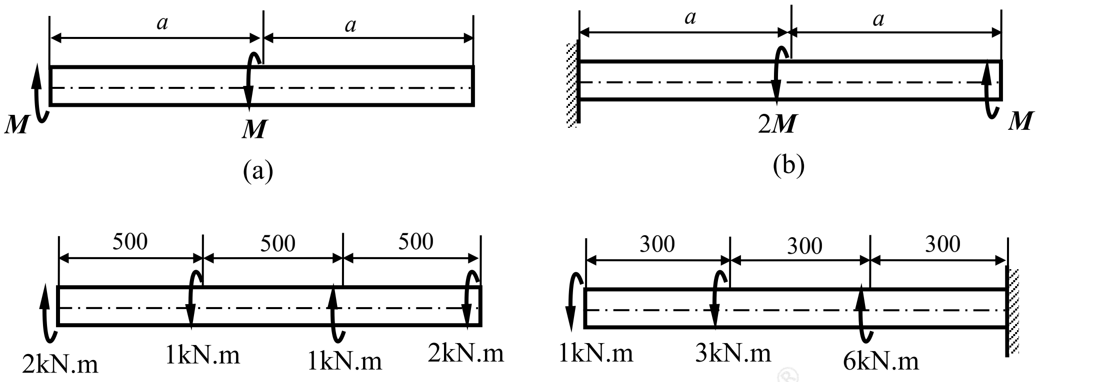
3）$\sigma_{AB}=\frac{N_{AB}}{A}=-\frac{30\times10^3}{200}=-150\text{MPa}$

$$\sigma_{BC}=\frac{N_{BC}}{A}=\frac{20\times10^3}{200}=100\text{MPa}$$

$$\sigma_{CD}=\frac{N_{CD}}{A}=\frac{10\times10^3}{200}=50\text{MPa}$$

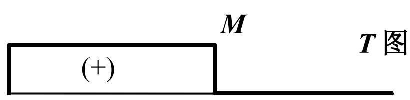
第三章　扭转

1 试求图示各轴的扭矩，并画出扭矩图。

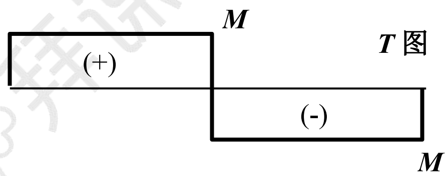


(a)　(b)　(c)　(d)

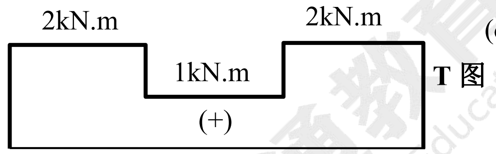
解：(a)



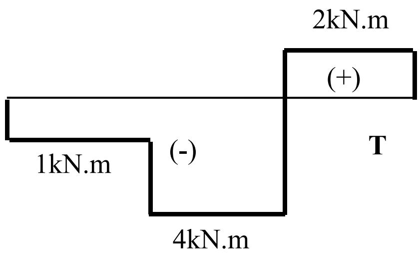
(b)



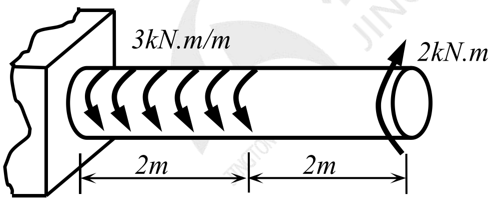
(c)



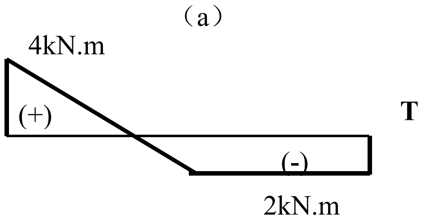
(d)



2、作图示杆件的扭矩图。



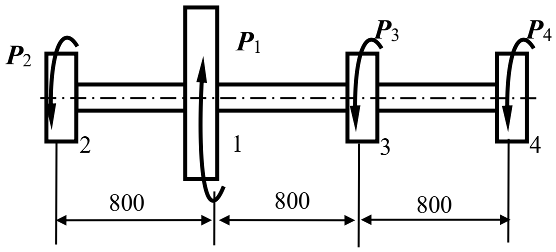
（a）



3、某传动轴，转速 n=2500 r/min(转/分），轮 1 为主动轮，输入的功率 P_1=50 kW，轮 2、轮 3 与轮 4 为从动轮，输出功率分别为 P_2=10 kW，P_3=P_4=20 kW。

(1) 试画轴的扭矩图，并求轴的最大扭矩。

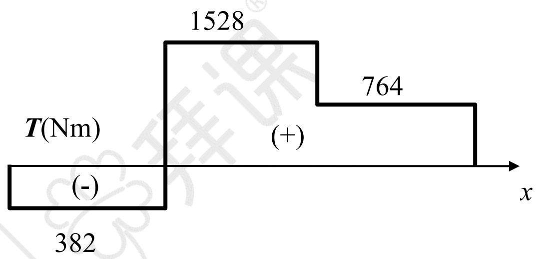
(2) 若将轮 1 与论 3 的位置对调，轴的最大扭矩变为何值，对轴的受力是否有利。



解：(1) 计算各传动轮传递的外力偶矩；

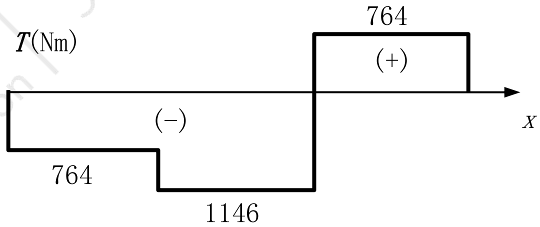
$$M_1=9550\frac{P_1}{n}=1910Nm \quad M_2=382Nm \quad M_3=M_4=764Nm$$

(2) 画出轴的扭矩图，并求轴的最大扭矩；



$$T_{\max}=1528\ kNm$$

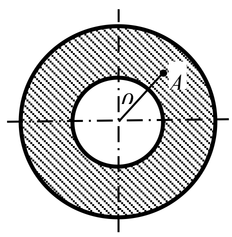
(3) 对调论 1 与轮 3，扭矩图为；



$$T_{\max}=1146kNm$$

所以对轴的受力有利。

4、图示空心圆截面轴，外径 D=40 mm，内径 d=20 mm，扭矩 T=1 kNm，试计算 A 点处(ρ_A=15 mm)的扭转切应力τ_A，以及横截面上的最大与最小扭转切应力。



解：(1) 计算横截面的极惯性矩；

$$I_p=\frac{\pi}{32}(D^4-d^4)=2.356\times10^5\ mm^4$$

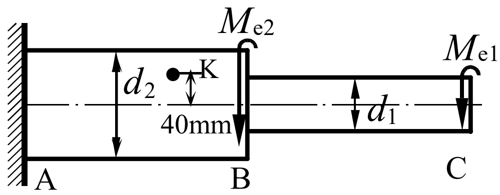
(2) 计算扭转切应力；

$$\tau_A=\frac{T\rho_A}{I_\rho}=\frac{1\times10^6\times15}{2.356\times10^5}=63.7\ MPa$$

$$\tau_{\max}=\frac{T\rho_{\max}}{I_\rho}=\frac{1\times10^6\times20}{2.356\times10^5}=84.9\ MPa$$

$$\tau_{\min}=\frac{T\rho_{\min}}{I_\rho}=\frac{1\times10^6\times10}{2.356\times10^5}=42.4\ MPa$$

5、 阶梯型实心圆轴如图所示，已知圆轴直径 $d_2 = 120mm$，$d_1 = 80mm$，$M_{e1} = 5kN.m$，$M_{e2} = 3.5kN.m$，求 K 点的剪应力及圆轴的最大剪应力。



解：圆轴中扭矩：

$$T_{AB} = M_{e1} + M_{e2} = 8.5\text{kN.m} \qquad T_{Bc} = M_{e1} = 5\text{kN.m}$$

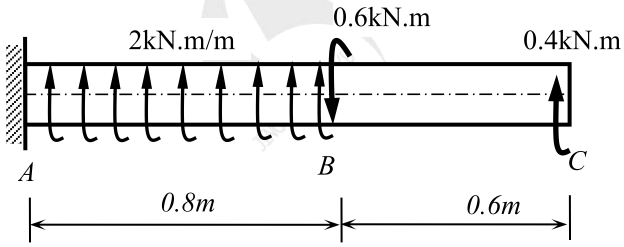
$$\tau_K = \frac{T\rho_K}{I_P} = \frac{8.5\times10^6\times40}{\frac{\pi\times120^4}{32}} = 16.7\ MPa$$

$$(\tau_{\max})_{AB} = \frac{T_{AB}}{W_{t2}} = \frac{8.5\times10^6}{\frac{\pi\times120^3}{16}} = 25.1\ MPa$$

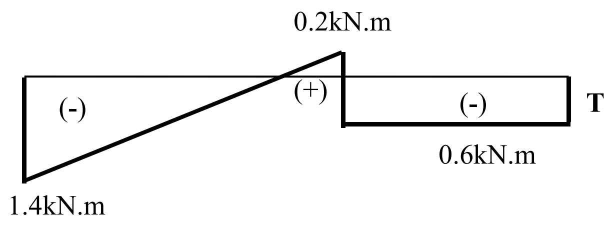
$$(\tau_{\max})_{BC} = \frac{T_{BC}}{W_{t1}} = \frac{5\times10^6}{\frac{\pi\times80^3}{16}} = 49.7\ MPa$$

因此圆轴的最大剪应力：$\tau_{\max} = (\tau_{\max})_{BC} = 49.7\ MPa$

6、实心轴受力如图所示，许用切应力[τ]=100MPa，试确定圆轴所需最小直径。



解：（1）作轴的扭矩图



（2）T_{max}=1.4kN.m

由强度条件：

$$\tau_{\max}=\frac{\boldsymbol{T}_{\max}}{\boldsymbol{W}_t}=\frac{1.4\times10^6}{\frac{\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{d}^3}{16}}\leq[\tau]=100\boldsymbol{MPa}\qquad 得\ \boldsymbol{d}\geq41.5\boldsymbol{mm}$$

因此，圆轴的最小直径为 42mm。

7、直径 $d=25$ mm 的钢圆杆受轴向拉力 60 kN 作用时，在标距 0.2 m 的长度内伸长了 0.118mm，受扭转力偶矩 0.15 kN·m 作用时，相距 0.2 m 两截面的相对扭转角为 0.56°，求钢材的弹性模量 E、切变模量 G 和泊松比 ν。

解：$\varepsilon=\dfrac{\Delta l}{l}=5.9\times10^{-4}$，　$\sigma=\dfrac{N}{A}=122.2$ MPa

则 $E=\sigma/\varepsilon=207$ GPa

$$\tau_{\max}=\frac{T}{W_{\mathrm{p}}}=48.89\ \text{MPa},\qquad \gamma=\frac{d/2}{l}\phi\times\frac{\pi}{180}=6.16\times10^{-4}\ \text{rad}$$

解得　$G=\dfrac{\tau}{\gamma}=79.4$GPa

又　$G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$，得 $\nu=0.3$

8、圆轴的直径 $d=50mm$，转速为 120r/min。若该轴横截面上的最大切应力等于 60 MPa，试问所传递的功率为多大？

解：（1）计算圆形截面的抗扭截面模量：

$$W_p=\frac{1}{16}\pi d^3=\frac{1}{16}\times3.14\times50^3=24531(mm^3)$$

（2）计算扭矩

$$\tau_{\max}=\frac{T}{W_p}=60N/mm^2$$

$$T=60N/mm^2\times24531mm^3=1471875N\cdot mm=1.47(kN\cdot m)$$

（3）计算所传递的功率

$$T=M_e=9.55\frac{P}{n}=1.47(kN\cdot m)$$

$$P=1.473\times120/9.55=18.5(kW)$$

9、某小型水电站的水轮机容量为 50kW，转速为 300r/min，钢轴直径为 75mm，若在正常运转下且只考虑扭矩作用，其许用切应力$[\tau]=20MPa$。试校核轴的强度。

解：（1）计算最大工作切应力

$$\tau_{\max}=\frac{M_e}{W_p}=\frac{T}{W_p}$$

式中，$M_e=9.55\frac{N_k}{n}=9.55\times\frac{50}{300}=1.59(kN\cdot m)$；

$$W_p=\frac{1}{16}\pi d^3=\frac{1}{16}\times3.14\times75^3=8.28\times10^4(mm^3)。$$

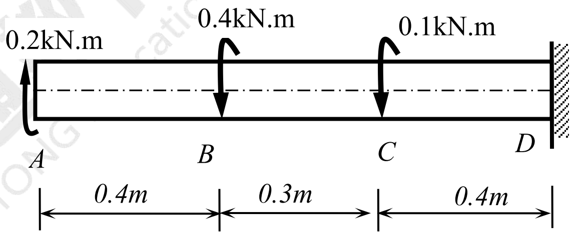
故：$\tau_{\max}=\frac{M_e}{W_p}=\frac{1590000N\cdot mm}{8.28\times10^4mm^3}=19.2MPa$

（2）强度校核

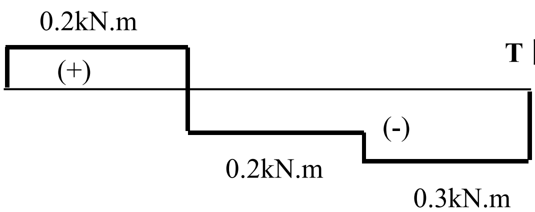
因为$\tau_{\max}=19.2MPa$，$[\tau]=20MPa$，即$\tau_{\max}\le[\tau]$，

所以轴的强度足够，不会发生破坏。

10、实心圆轴如图所示，横截面直径 d=20mm，材料的剪变模量 G=80GPa，试求截面 A 的扭转角。



解：（1）作扭矩图



（2）扭转角

$$\phi_A=\phi_{AB}+\phi_{BC}+\phi_{CD}$$

$$=\frac{T_{AB}\cdot l_{AB}}{GI_p}+\frac{T_{BC}\cdot l_{BC}}{GI_p}+\frac{T_{CD}\cdot l_{CD}}{GI_p}$$

$$=\frac{32\times\left(0.2\times10^6\times400-0.2\times10^6\times300-0.3\times10^6\times400\right)}{80\times10^3\times\pi\times20^4}$$

$$=-0.080\text{rad}$$

11．某实心圆轴，传递扭矩 T=2kN.m，已知材料[τ]=100MPa；[φ]=0.8°/m，G=80GPa，试按强度条件和刚度条件设计截面直径 d。

解：（1）由圆轴的强度条件：

$$\tau_{\max}=\frac{T}{W_t}=\frac{T}{\frac{\pi d^3}{16}}\leq[\tau]$$

$$d\geq\sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau]}}=\sqrt[3]{\frac{16\times2\times10^6}{\pi\times100}}=46.7mm$$

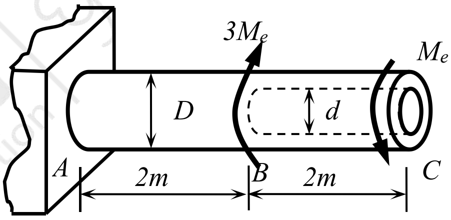
由刚度条件

$$\varphi_{\max}=\frac{T}{GI_p}\times\frac{180}{\pi}=\frac{T}{G\frac{\pi d^4}{32}}\times\frac{180}{\pi}\leq[\varphi]$$

$$d\geq\sqrt[4]{\frac{32\times180\times T}{G\pi^2[\varphi]}}=\sqrt[4]{\frac{32\times180\times2\times10^9}{80\times10^3\times\pi^2\times0.8}}=65.4mm$$

所以构件的最小直径为 d=66mm。

12、如图所示圆轴 AB 段为实心，BC 段为空心，它们的外直径都为 D=100mm，BC 段的内直径 d=80mm，材料的许用切应力[τ]=60MPa，试求此轴能承受的 M_e 的最大值。



（a）

解：（1）内力分析

AB 段：T_1=-2M_e

BC 段：T_2=M_e

（2）确定 M_e 的许可值

由 AB 段强度

$$\tau_{\max}=\frac{T_1}{W_{t1}}=\frac{2M_e}{\frac{pD^3}{16}}=\frac{16' \ 2Me}{p' \ 100^3} < [\tau]=60$$

得 $$M_e £ \frac{60创p \ \ 100^3}{32}=5.89kN\,m$$

由 BC 段的强度

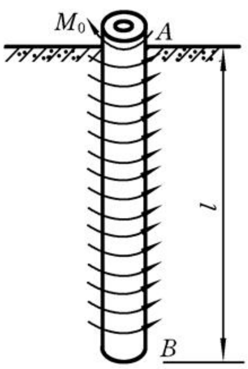
$$\tau_{\max}=\frac{T_2}{W_{t2}}=\frac{M_e}{\frac{pD^3\left(1-\alpha^4\right)}{16}}=\frac{16' \ Me}{p' \ 100^3\left(1-0.8^4\right)} < [\tau]=60$$

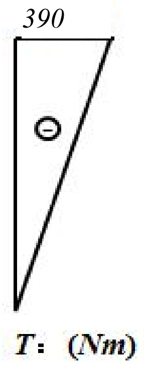
得 $$M_e £ \frac{60创p \ \ 100^3\left(1-0.8^4\right)}{16}=6.95kN\,m$$

两段比较后，取[M_e]=5.89kN.m。

13、已知钻探机钻杆的外径 D=60mm，内径 d=50mm，功率 P=7.35kW，转速 n=180r/min，

钻杆入土深度 l=40m，材料的 G=80GPa，[τ]=40MPa。假设土壤对钻杆的阻力沿长度均匀分布，试求：（1）单位长度上土壤对钻杆的阻力矩；（2）作钻杆的扭矩图，并进行强度校核；（3）A、B 两截面的相对扭转角。





解：求扭力矩：$M_0 = 9550 \times \dfrac{7.35}{180} = 390Nm$

（1）设阻力矩分布集度为 m0，由钻杆的平衡条件：

$$m_0 \cdot l = M_0 \Rightarrow m_0 = \frac{M_0}{l} = \frac{390}{40} = 9.75Nm/m$$

（2）作扭矩图，危险截面为 A 截面：

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} = \frac{16 \times 390}{\pi \times 0.06^3 \times [1-(5/6)^4]} = 17.77MPa < [\tau]$$

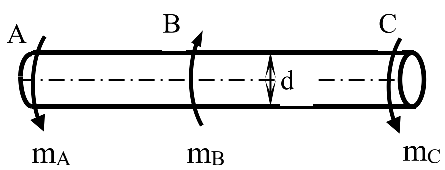
（3）如图取坐标系，有：

$$T(x) = -m_0 \cdot x$$

$$|\varphi_{AB}| = \left|\int_0^l \frac{T(x)}{GI_p}\mathrm{d}x\right| = \frac{m_0}{GI_p}\int_0^l x\mathrm{d}x = \frac{m_0 l^2}{2GI_p} = \frac{M_0 l}{2GI_p}$$

$$= \frac{32 \times 390 \times 40}{2 \times 80 \times 10^9 \times \pi \times 0.06^4 \times [1-(5/6)^4]} = 0.148\text{弧度} = 8.48^\circ$$

14、图示受扭圆轴，直径 d=40mm，m_A=0.4kN.m，m_B=0.9kN.m，m_C=0.5kN.m，G=80GPa，[τ]=100MPa，[φ]=1 °/m 。试校核该轴的强度与刚度。



解：（1）内力分析

AB 段：T_1=-0.4kN.m

BC 段：T_2=0.5kN.m

（2）由内力分析可知

$$T_{\max} = 0.5kN.m$$

强度校核：

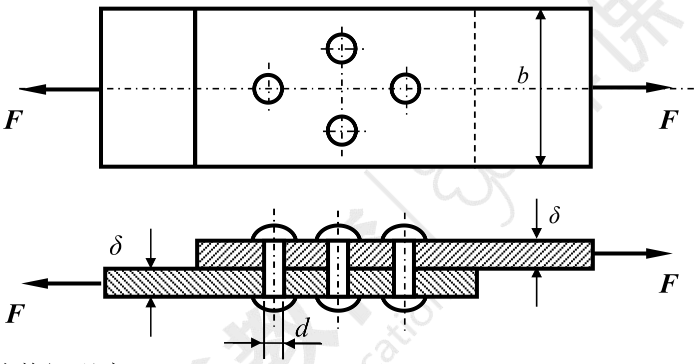
$$\tau_{\max}=\frac{T_{\max}}{W_t}=\frac{0.5\times10^6\times16}{\pi\times40^3}=39.81MPa<[\tau]$$

刚度校核

$$\varphi_{\max}=\frac{T_{\max}}{GI_P}\times\frac{180}{\pi}=\frac{0.5\times10^6\times32\times180\times10^3}{80\times10^3\times\pi^2\times40^4}=1.43^\circ/m>[\varphi]\quad{}^\circ/m$$

综上，圆轴强度条件满足而刚度条件不满足，故不能安全工作。

15、图示接头，承受轴向载荷 **F** 作用，试校核接头的强度。已知：载荷 F=80 kN，板宽 b=80 mm，板厚δ=10 mm，铆钉直径 d=16 mm，许用应力[σ]=160 MPa，许用切应力[τ] =120 MPa，许用挤压应力[σ_{bs}] =340 MPa。板件与铆钉的材料相等。



解：(1) 校核铆钉的剪切强度

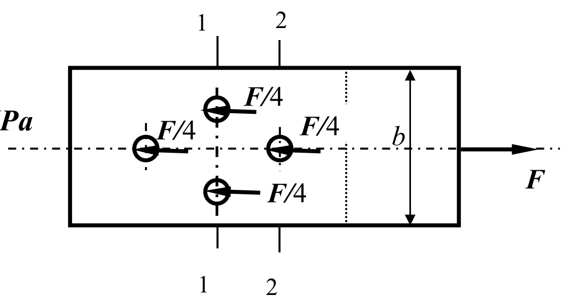
$$\boldsymbol{\tau}=\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{A}}=\frac{\frac{1}{4}\boldsymbol{F}}{\frac{1}{4}\boldsymbol{\pi d}^2}=99.5\ \boldsymbol{MPa}\le[\boldsymbol{\tau}]=120\ \boldsymbol{MPa}$$

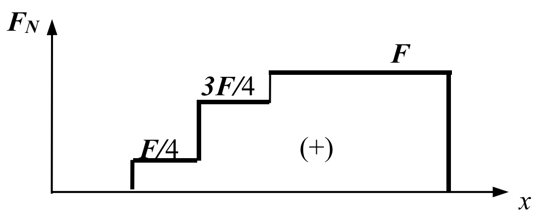
(2) 校核铆钉的挤压强度

$$\boldsymbol{\sigma}_{bs}=\frac{\boldsymbol{F}_{bs}}{\boldsymbol{A}_{bs}}=\frac{\frac{1}{4}\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{d\delta}}=125\ \boldsymbol{MPa}\le[\boldsymbol{\sigma}_{bs}]=340\ \boldsymbol{MPa}$$

(3) 考虑板件的拉伸强度；

对板件受力分析，画板件的轴力图；





校核 1-1 截面的拉伸强度

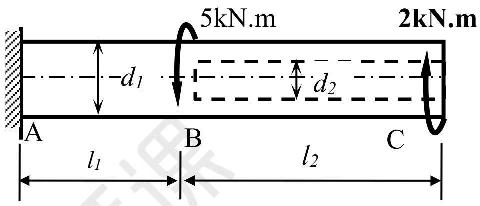
$$\sigma_1=\frac{F_{N1}}{A_1}=\frac{\frac{3F}{4}}{(b-2d)\delta}=125\ MPa\le[\sigma]=160\ \mathrm{MPa}$$

校核 2-2 截面的拉伸强度

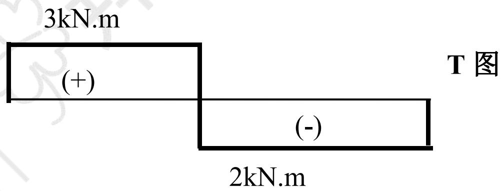
$$\sigma_1=\frac{F_{N1}}{A_1}=\frac{F}{(b-d)\delta}=125\ MPa\le[\sigma]=160\ \mathrm{MPa}$$

所以，接头的强度足够。

16、已知如图圆轴 AB 段为实心，BC 为空心，$d_1=2d_2=100$mm，材料的剪变模量 G=80GPa。（1）求杆的最大剪应力。（2）若使自由端的扭转角为零，求两段杆长之比 l_1/l_2。



解：（1）作扭矩图



（2）求最大剪应力

AB 段：

$$\tau_{1,\max}=\frac{T_1}{W_{t1}}=\frac{3\times10^6\times16}{\pi\times100^3}=15.28MPa$$

BC 段

$$\tau_{2,\max}=\frac{|T_2|}{W_{t2}}=\frac{2\times10^6\times16}{\pi\times100^3\left(1-0.5^4\right)}=10.86MPa$$

所以杆件的最大剪应力

$$\tau_{\max}=\tau_{1,\max}=15.28MPa$$

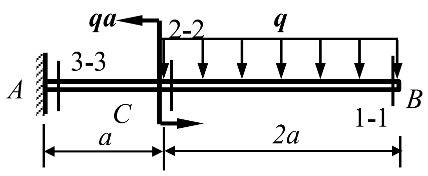
（3）若使自由端的扭转角为零，即：

$$\phi_A=\phi_{AB}+\phi_{BC}=\frac{T_1\cdot l_1}{GI_{p1}}+\frac{T_2\cdot l_2}{GI_{p2}}=0$$

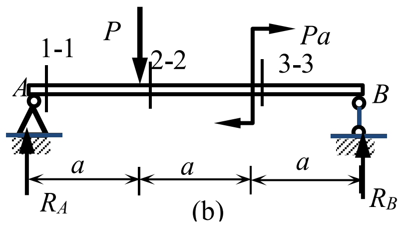
得：$$\frac{l_1}{l_2}=-\frac{GI_{p1}T_2}{GI_{p2}T_1}=\frac{\frac{\pi d_1^4}{32}\times2}{\frac{\pi d_1^4\left(1-0.5^4\right)}{32}\times3}=\frac{32}{45}$$

第四章　弯曲内力

1、求图示梁中指定截面上的剪力和弯矩（假设各指定截面与最近的端面、最近的支座或最近的力所在截面之间距离趋于零）。



(a)



(b)

解：(a)截面 1-1:　$V_1=0$　$M_1=0$

截面 2-2：　$V_2=2qa$　$M_2=-2qa^2$

截面 3-3：　$V_3=2qa$　$M_3=-2qa\cdot 2a+qa^2=-3qa^2$

(b)求支反力

$$R_A+R_B-P=0$$

$$R_B\times 3a-Pa-Pa=0$$

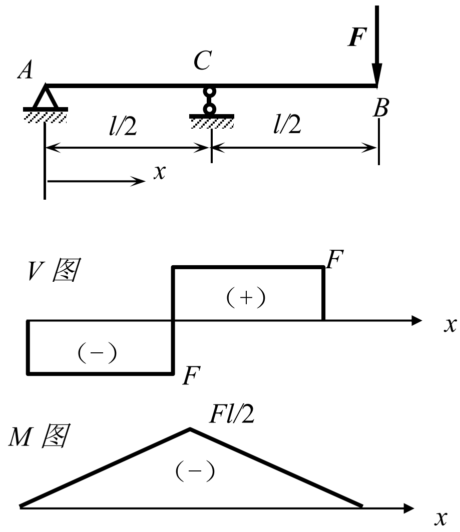
$$R_A=\frac{1}{3}P\qquad R_B=\frac{2}{3}P$$

截面 1-1：$V_1=R_A=\frac{1}{3}P\quad M_1=0$

截面 2-2：$V_2=R_A-P=-\frac{2}{3}P\quad M_2=\frac{1}{3}Pa$

截面 3-3：$V_1=-R_B=-\frac{2}{3}P\quad M_2=\frac{2}{3}Pa$

2、已知梁的尺寸及受力如图所示，（1）写出梁的内力方程；（2）画剪力图与弯矩图。



解：（1）求支反力

$$R_A=-F(\downarrow)\qquad R_B=2F(\uparrow)$$

（2）列内力方程

建立 x 轴（以 A 为原点，向右为正方向）

AC 段：$V(x)=-F(0<x<l/2)$

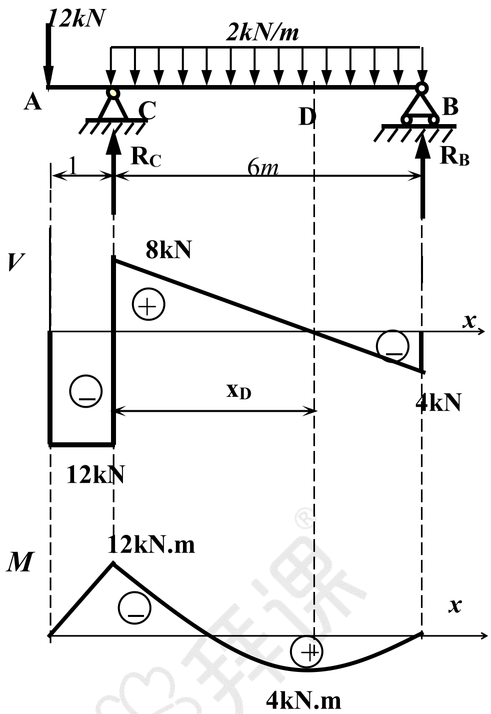
$M(x)=-Fx(0\le x\le l/2)$

CB 段：$V(x)=F(l/2<x<l)$

$M(x)=-F(l-x)(l/2\le x\le l)$

（3）根据方程作内力图

3．试做图示梁的剪力图和弯矩图，并求$|V|_{max}$和$|M|_{max}$。



解：1）求支反力

R_C=20kN

R_B=4kN

2）作 V 图

按外载走向从左向右

x_D=4m

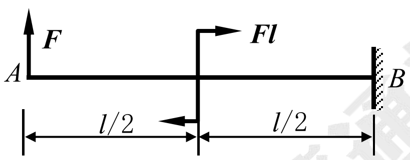
3）作 M 图

M_C=12kN.m

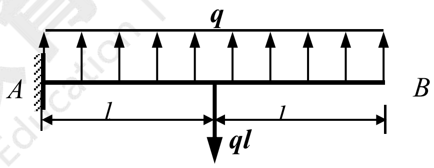
4） $|V|_{\max} = 12kN$

$|M|_{\max} = 12kN.m$

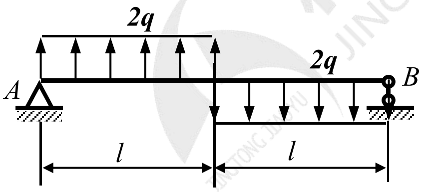
4、图示各梁，试利用剪力、弯矩与载荷集度的关系画剪力与弯矩图。



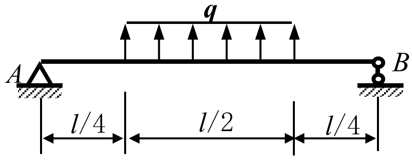
(a)



(b)

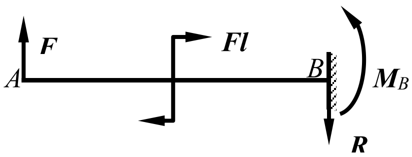


(c)



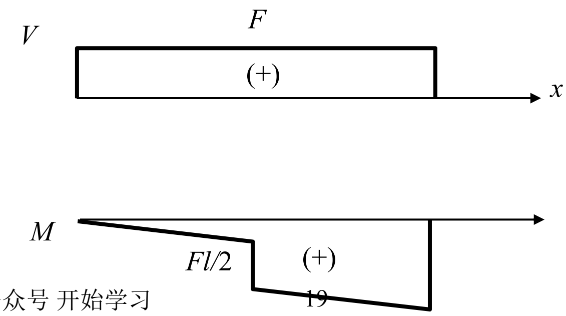
(d)

解：(a)(1) 求约束力；



$\boldsymbol{R_B = F} \qquad \boldsymbol{M_B = 2Fl}$

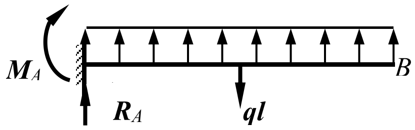
(2) 画剪力图和弯矩图；



$2Fl$

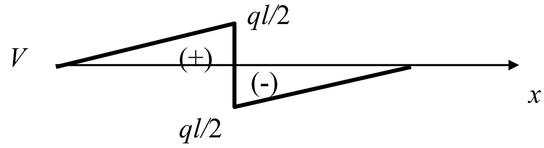
$3Fl/2$　　x

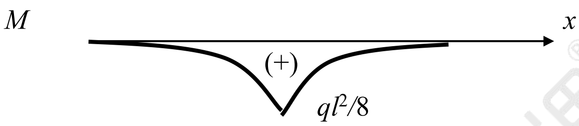
(b) (1) 求约束力



$R_A=0$　　$M_A=0$

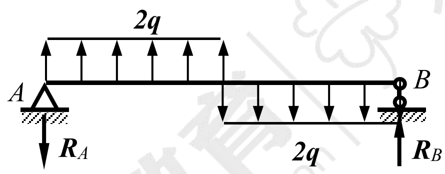
(2) 画剪力图和弯矩图；





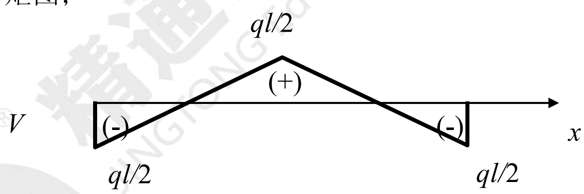
(c)

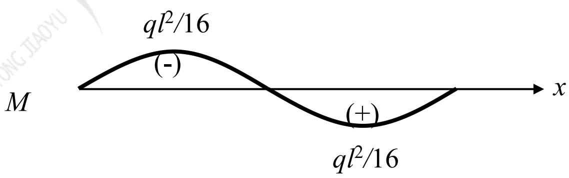
(1) 求约束力



$$R_A=R_B=\frac{ql}{2}$$

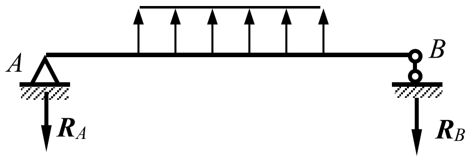
(2) 画剪力图和弯矩图；





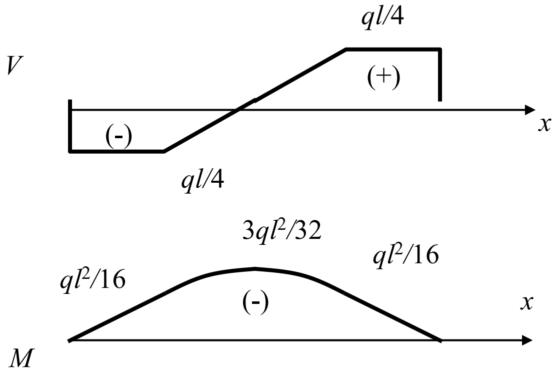
(d)

(1) 求约束力；

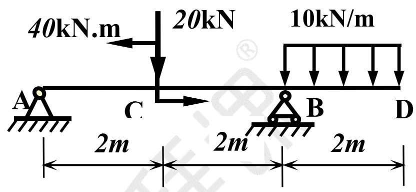


$$R_A=R_B=\frac{ql}{4}$$

(2) 画剪力图和弯矩图；



5、作图示梁的剪力图和弯矩图。

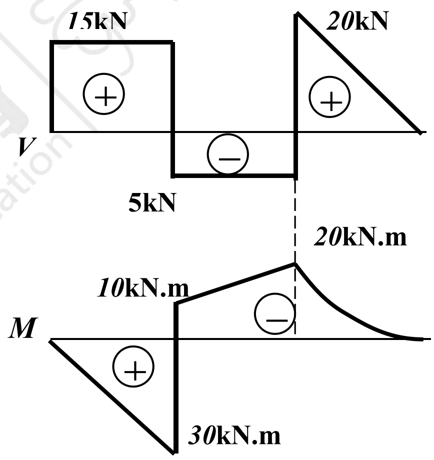


解：（1）求支反力

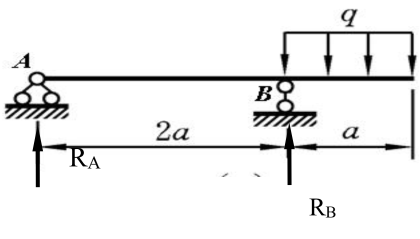
$R_A = 15kN(\uparrow)$　$R_B = 25kN(\uparrow)$

（2）作剪力图

（3）作弯矩图



6、作图示梁的剪力图和弯矩图。

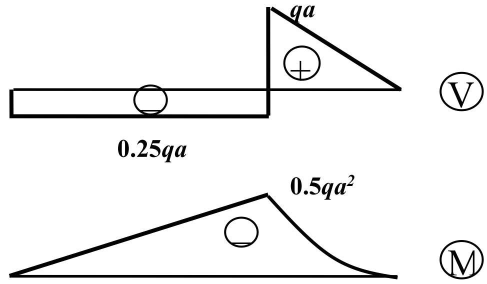


解：（1）求支反力

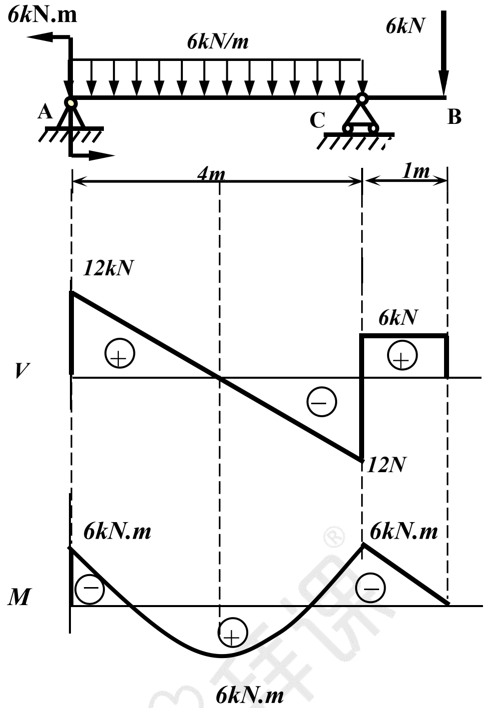
$$R_A = -\frac{1}{4}qa \quad R_B = \frac{5}{4}qa$$

（2）画剪力图

（3）画弯矩图



7、作图示梁的剪力图和弯矩图。



解：

由梁的整体平衡解得：

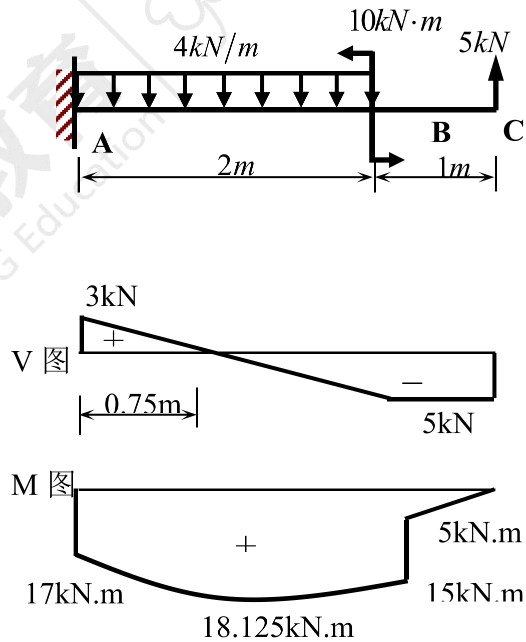
$R_A = 12\text{kN}$

$R_C = 18\text{kN}$

绘剪力图如右：

弯矩图

8、试做图示梁的剪力图和弯矩图。



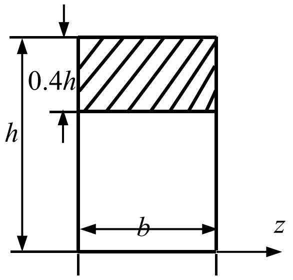
解：

1）作剪力图如右

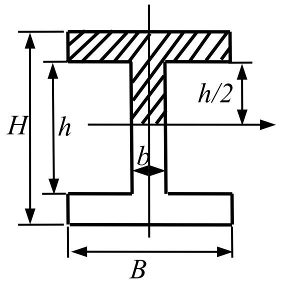
2）作弯矩图如右

第五章　截面图形的几何性质

1、求图示平面图形中阴影部分对 z 轴的静矩。

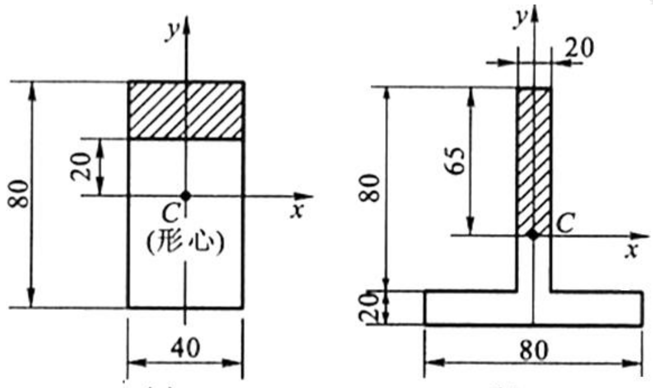


$$S_Z = b \cdot 0.4h \cdot (0.6h + 0.2h) = 0.32bh^2$$



$$S_Z = B \cdot \frac{H-h}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + \frac{H-h}{4}\right) + b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{B\left(H^2 - h^2\right)}{8} + \frac{bh^2}{8}$$

2、试求图示各截面的阴影线面积对 X 轴的静积。



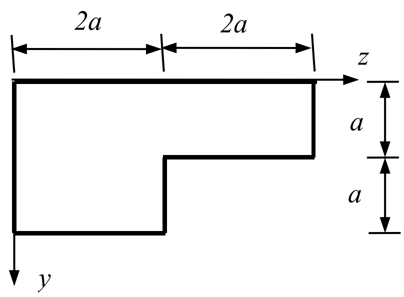
(a)　　(b)

解：（a）$S_x = A \cdot y_c = (40 \times 20) \times (20 + 10) = 24000(mm^3)$

（b）$S_x = A \cdot y_c = (20 \times 65) \times \dfrac{65}{2} = 42250(mm^3)$

3、求图示图形的形心位置。

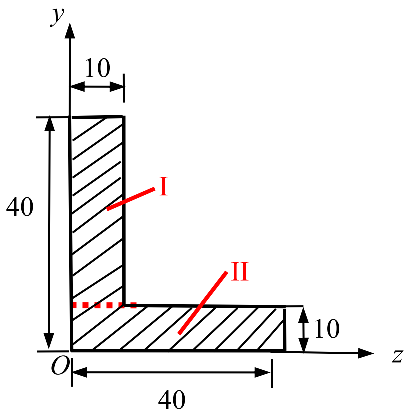
解：



$$y_C = \frac{\sum A_i y_{Ci}}{A} = \frac{4a \cdot 2a \cdot a - 2a \cdot a \cdot 1.5a}{4a \cdot 2a - 2a \cdot a} = \frac{5}{6}a$$

$$Z_C = \frac{\sum A_i z_{Ci}}{A} = \frac{4a \cdot 2a \cdot 2a - 2a \cdot a \cdot 3a}{4a \cdot 2a - 2a \cdot a} = \frac{5}{3}a$$

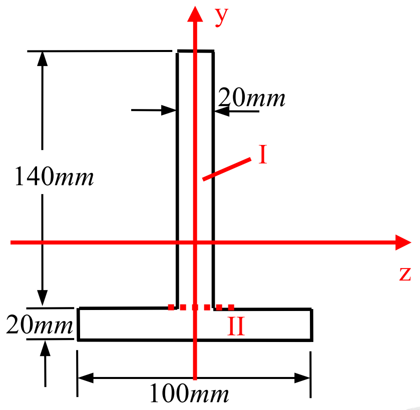
4、求图示平面图形对 z、y 轴的惯性矩。



$$I_Z = I_I + I_{II} = \frac{10\cdot 30^3}{12} + 40\cdot 10\cdot 25^2 + \frac{40\cdot 10^3}{12} + 40\cdot 10\cdot 5^2$$
$$= 2.23\times 10^5\, mm^4$$

由于图形对称，$I_y = I_Z == 2.23\times 10^5\, mm^4$

4、试求图示平面图形的形心主惯性轴的位置，并求形心主惯性矩。

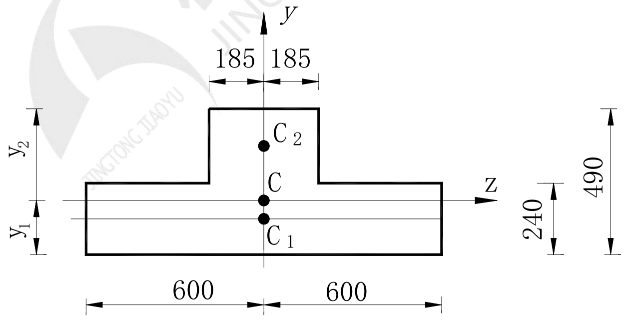


$$y_C = \frac{10\cdot 20\cdot 90 + 20\cdot 100\cdot 10}{140\cdot 20 + 20\cdot 100} = 56.7mm$$

$$I_Z = I_{zI} + I_{zII} = \frac{20\cdot 140^3}{12} + 140\cdot 20\cdot 33.3^2 +$$
$$\frac{100\cdot 20^3}{12} + 100\cdot 20\cdot 46.7^2 = 1.21\times 10^7\, mm^4$$

$$I_Y = \frac{140\cdot 20^3}{12} + \frac{20\cdot 100^3}{12} = 1.76\times 10^6\, mm^4$$

5、 图示砌体 T 形截面，（1）试计算图形的形心位置参数 y_1、y_2；（2）试计算图形对形心轴和 y 轴的惯性矩及其相应的回转半径。



解：（1）计算图形的形心位置参数 y_1、y_2

建立图示坐标，则图形的形心在 y 轴上。

$$y_C = y_1 = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A} = \frac{370\times 250\times (240 + \frac{250}{2}) + 240\times 1200\times 120}{370\times 250 + 240\times 1200}\text{mm=179.6mm} = y_1$$

$$y_2 = 490 - y_1 = 490 - 179.6 = 310.4\text{mm}$$

（2）计算图形对形心轴惯性矩及其回转半径

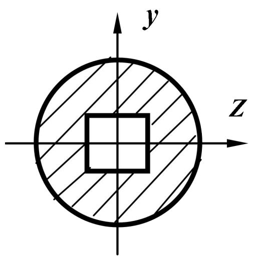
$$I_z = I_z^1 + I_z^2 = \frac{1200\times240^3}{12} + 1200\times240\times(179.6-\frac{240}{2})^2 + \frac{370\times250^3}{12} + 370\times250\times(310.4-\frac{250}{2})^2 = 6.067\times10^9\,\text{mm}^4$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{6.067\times10^9}{1200\times240+250\times370}} = 126.3\text{mm}$$

$$I_y = I_y^1 + I_y^2 = \frac{240\times1200^3}{12} + \frac{(490-240)\times(185\times2)^3}{12} = 3.562\times10^{10}\,\text{mm}^4$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{3.562\times10^{10}}{1200\times240+250\times370}} = 305.9\text{mm}$$

6、如图所示是一枚被称为“孔方兄”的中国古钱币，设圆的直径为d，挖去的正方形边长为b，若$b=d/2$，求该截面的弯曲截面系数W_Z。



$$I_z = \frac{pd^4}{64} - \frac{b^4}{12} = \frac{d^4}{192}(3p-1)$$

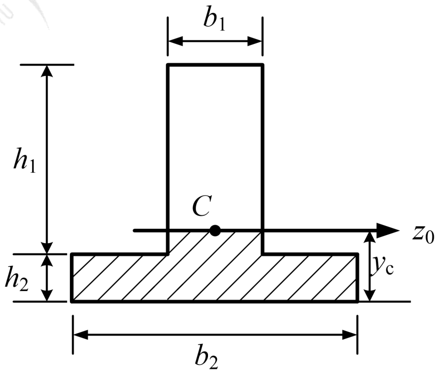
$$W_z = (\frac{pd^4}{64} - \frac{b^4}{12})/(d/2) = \frac{d^3}{96}(3p-1$$

7、在图示的对称倒 T 形截面中，$b_1 = 0.3$ m，$b_2 = 0.6$ m，$h_1 = 0.5$ m $h_2 = 0.14$ m。

（1）求形心 C 的位置；

（2） 求阴影部分对z_0轴的静矩；

（3）问z_0轴以上部分的面积对z_0轴的静矩与阴影部分对z_0轴的静矩有何关系？



解：（1）图形的面积为

$$A = 0.5\times0.3 + 0.6\times0.14 = 0.234\text{m}^2$$

对 Z 轴的静距为

$$S_z = \sum_{i=1}^{2} A_i\bar{y} = 0.3\times0.5\times(0.25+0.14) + 0.6\times0.14\times\left(0.14/2\right) = 0.06438\text{m}^3$$

形心坐标为

$$y_C = \frac{S_z}{A} = \frac{0.06438}{0.234} = 0.275\text{m}$$

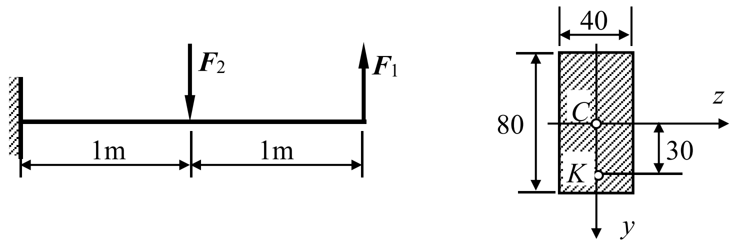
（2）求阴影部分对 z_0 轴的静距为

$$S_{z_0} = \sum_{i=1}^{2} A_i \overline{y} = 0.6 \times 0.14 \times \left(0.14/2 + (0.275 - 0.14)\right) + 0.3 \times (0.275 - 0.14)^2 \times \frac{1}{2} = 2 \times 10^{-2}\text{m}^3$$

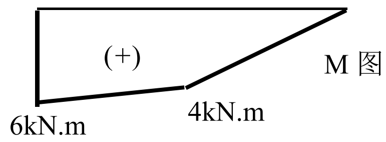
（3）z_0 轴以上部分的面积对 z_0 轴的静矩与阴影部分对 z_0 轴的静矩关系为：经过计算得出相等。

第六章　弯曲应力

1、图示悬臂梁，横截面为矩形，承受载荷 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 作用，且 $F_1=2F_2=4$ kN，试计算梁内的最大弯曲正应力，及该应力所在截面上 K 点处的弯曲正应力。



解：(1) 画梁的弯矩图



(2) 最大弯矩（位于固定端）：

$$M_{\max}=6\ kN.\mathrm{m}$$

(3) 计算应力：

最大应力：

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_Z}=\frac{M_{\max}}{\frac{bh^2}{6}}=\frac{6\times10^6}{\frac{40\times80^2}{6}}=140.6\ MPa$$

K 点的应力：

$$\sigma_K=\frac{M_{\max}\cdot y}{I_Z}=\frac{M_{\max}\cdot y}{\frac{bh^3}{12}}=\frac{6\times10^6\times30}{\frac{40\times80^3}{12}}=105.5MPa$$

2、把直径 d=0.4mm 的钢丝弯成直径 D=400mm 的圆弧，弹性模量 E=200 GPa，试计算钢丝中横截面上产生的最大正应力。

解：(1) 由钢丝的曲率半径知

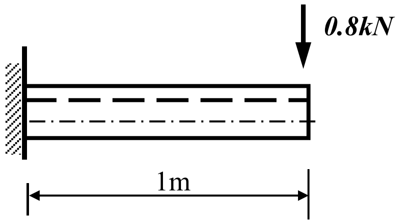
$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI_z}\qquad \therefore\frac{E}{\rho}=\frac{M}{I_z}$$

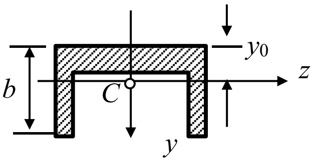
(2) 钢丝中产生的最大正应力

$$\sigma_{\max}=\frac{My_{\max}}{I_z}=\frac{Ey_{\max}}{\rho}=\frac{200\times10^9\times0.4/2}{400}=100\ MPa$$

3、图示悬臂梁，由 No22 槽钢制成，弯矩 M=800 N.m，并位于纵向对称面（即 x-y 平面）内。试求梁内的最大弯曲拉应力与最大弯曲压应力。

（截面的几何性质：$y_0 = 20.3\ mm \quad b = 79\ mm \quad I_z = 176\ cm^4$）





解：(1) 截面的几何性质：

$$y_0 = 20.3\ mm \quad b = 79\ mm \quad I_z = 176\ cm^4$$

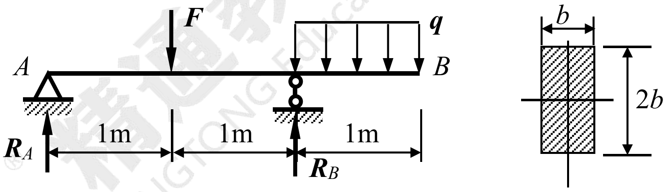
(2) 最大弯曲压应力（发生在下边缘点处）

$$\sigma_{c\max} = \frac{M\cdot(b-y_0)}{I_z} = \frac{800\times10^3\times(79-20.3)}{176\times10^4} = 26.7\ MPa$$

(3) 最大弯曲拉应力（发生在上边缘点处）

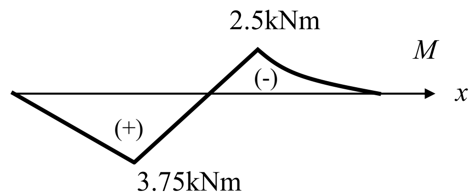
$$\sigma_{t\max} = \frac{M\cdot y_0}{I_z} = \frac{800\times10^3\times20.3}{176\times10^4} = 9.23\ MPa$$

4、 图示矩形截面钢梁，承受集中载荷 **F** 与集度为 **q** 的均布载荷作用，试确定截面尺寸 *b*。已知载荷 *F*=10 kN，*q*=5 kN/m，许用应力[*σ*] =160 Mpa。



解：(1) 求约束力：$R_A = 3.75\ kN \quad R_B = 11.25\ kN$

(2) 画出弯矩图：

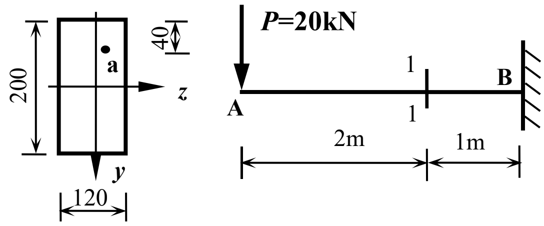


(3) 依据强度条件确定截面尺寸

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{3.75\times10^6}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{3.75\times10^6}{\frac{4b^3}{6}} \le [\sigma] = 160\ MPa$$

解得：$b \ge 32.7\ mm$

5、图示矩形截面梁受集中力作用，（1）求 1-1 截面上 a 点的弯曲正应力和弯曲剪应力；（2）若材料的许用应力[σ]=90MPa，试校核此梁的正应力强度。



解：（1）1-1 截面上的内力

$$V_1 = -20kN$$
$$M_1 = -40kN.m$$

$$\sigma_a = \frac{M_1}{I_z} y_a = \frac{-40\times10^6\times(-60)}{\dfrac{120\times200^3}{12}} = 30MPa$$

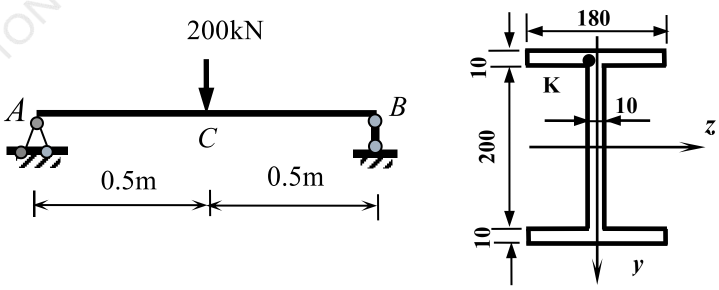
$$\tau_a = \frac{V_1 S_z^*}{I_z b} = \frac{-20\times10^3\times40\times120\times80}{\dfrac{120\times200^3}{12}\times120} = 0.8MPa$$

（2）全梁最大弯矩 $|M_{\max}| = 60kN.m$

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_z} = \frac{60\times10^6}{\dfrac{120\times200^2}{6}} = 75MPa \le [\sigma]$$

故全梁的正应力强度满足。

6、钢梁尺寸及受力如图，不计梁自重。求梁中的最大正应力及最大剪应力。

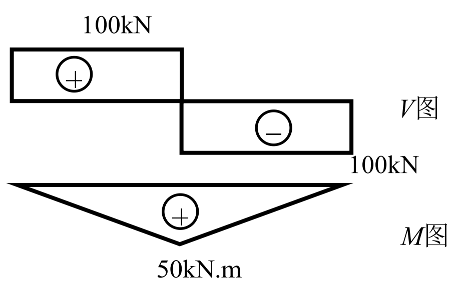


解：(1) 作梁的剪力图

作弯矩图

截面几何量计算

$$I_z = \frac{180\times220^3}{12} - \frac{170\times200^3}{12}$$
$$= 4.64\times10^7\,\text{mm}^4$$



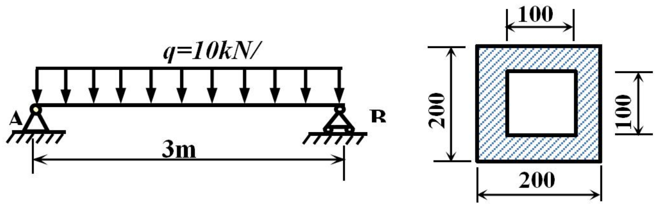
求最大正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{I_Z} = \frac{50\times10^6\times110}{4.64\times10^7} = 118.53\text{MPa}$$

求最大剪应力

$$\tau_{\max} = \frac{V_{\max}(S_z^*)_{\max}}{I_Z\times t} = \frac{100\times10^3\times(10\times180\times105+100\times10\times50)}{4.64\times10^7\times10} = 51.51\text{MPa}$$

7、求图示梁的最大弯曲正应力和最大弯曲剪应力。



解：最大剪力发生在支座截面，

最大弯矩发生在跨中截面

$$V_{\max}=\frac{ql}{2}=15kN$$

$$M_{\max}=\frac{ql^2}{8}=11.25kN$$

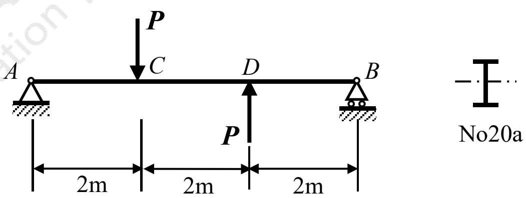
截面对中性轴的惯性矩 $I_z=\dfrac{200^4-100^4}{12}=1.25\times10^8 mm^4$

$$S^{\bullet}_{z\max}=200\times100\times50-100\times50\times25=8.75\times10^5 mm^3$$

最大正应力 $\sigma_{\max}=\dfrac{M_{\max}\cdot y_{\max}}{I_Z}=\dfrac{11.25\times10^6\times100}{1.25\times10^8}=9MPa$

最大剪应力 $\tau_{\max}=\dfrac{V_{\max}\cdot S^*_{z\max}}{I_Z\times b}=\dfrac{15\times10^3\times8.75\times10^5}{1.25\times10^8\times100}=1.05MPa$

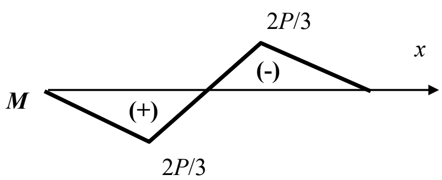
8、 20a 工字钢梁的支承和受力情况如图所示，若[σ]=160 MPa，试求许可载荷。抗弯截面系数：$\boldsymbol{W}=237\times10^{-6}\boldsymbol{m}^3$



解：(1) 画梁的弯矩图

由弯矩图知：$\boldsymbol{M}_{\max}=\dfrac{2\boldsymbol{P}}{3}$

(2) 强度计算

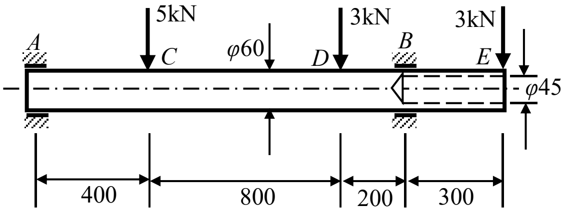


$$\boldsymbol{\sigma}_{\max}=\frac{\boldsymbol{M}_{\max}}{\boldsymbol{W}_z}=\frac{\frac{2\boldsymbol{P}}{3}}{\boldsymbol{W}_z}=\frac{2}{3\boldsymbol{W}_z}\cdot\boldsymbol{P}\le[\boldsymbol{\sigma}]$$

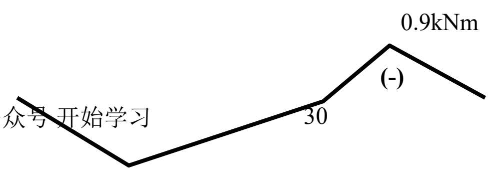
$$\therefore \boldsymbol{P}\le\frac{3\boldsymbol{W}_z[\boldsymbol{\sigma}]}{2}=\frac{3\times237\times10^3\times160}{2}=56.88\boldsymbol{kN}$$

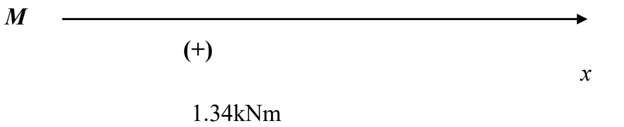
取许可载荷 $[\boldsymbol{P}]=56.88\boldsymbol{kN}$

9、图示圆轴的外伸部分系空心轴。试作轴弯矩图，并求轴内最大正应力。



解：(1) 画梁的弯矩图





由弯矩图知：可能危险截面是 C 和 B 截面

(2) 计算危险截面上的最大正应力值

C 截面：

$$\sigma_{C\max}=\frac{M_C}{W_{zC}}=\frac{M_C}{\frac{\pi d_C^3}{32}}=\frac{32\times1.34\times10^6}{\pi\times60^3}=63.2MPa$$

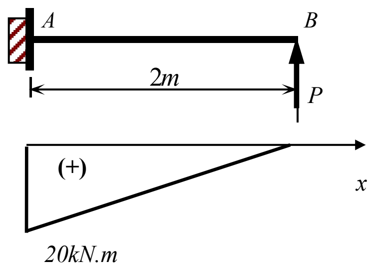
B 截面：

$$\sigma_{B\max}=\frac{M_B}{W_{zB}}=\frac{M_B}{\frac{\pi D_B^3}{32}(1-\frac{d_B^4}{D_B^4})}=\frac{0.9\times10^6}{\frac{\pi\times60^3}{32}(1-\frac{45^4}{60^4})}=62.1MPa$$

(3) 轴内的最大正应力值

$$\sigma_{\max}=\sigma_{C\max}=63.2MPa$$

10、矩形截面悬臂梁如图所示，已知 l=2 m， b/h =2/3，P=10 kN，[σ]=10 MPa，试确定此梁横截面的尺寸。



解：(1) 画梁的弯矩图

由弯矩图知： $M_{\max}=40\text{kN.m}$

(2) 计算抗弯截面系数

$$W=\frac{bh^2}{6}=\frac{\frac{2}{3}h^3}{6}=\frac{h^3}{9}$$

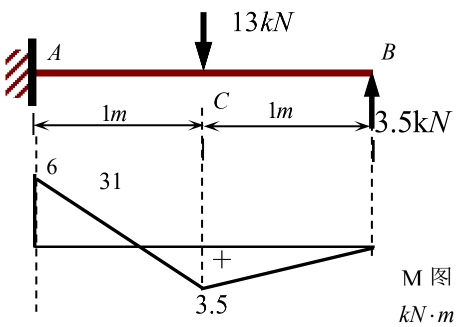
(3) 强度计算

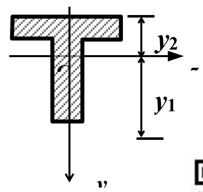
$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W}=\frac{20\times10^6}{\frac{h^3}{9}}\le[\sigma]$$

$$\therefore h\ge\sqrt[3]{\frac{9\times20\times10^6\times9}{[\sigma]}}=416mm$$

$$b\ge277mm$$

11、铸铁梁的截面形状尺寸、所受外力及弯矩图如下图所示。已知 z





为形心轴，y_1=86mm，y_2=54mm，惯性矩 $I_z=7.64\times10^6\text{mm}^4$，材料许可拉应力[$\sigma_t$]=40MPa，许可压应力[$\sigma_c$]=100MPa，试校核梁的强度。

解：1） 由弯矩图可知，危险截面为 C、A

$$M_C = M_{\max}^{+} = 3.5kN\cdot m$$

$$M_{\text{A}} = M_{\max}^{-} = 6\text{k}N\cdot m$$

2）C 截面校核（上压下拉）

$$\sigma_{c,\max} = \frac{M_C\cdot y_2}{I_Z} = \frac{3.5\times10^6\times54}{7.64\times10^6} = 24.74MPa < [\sigma_c]$$

$$\sigma_{t,\max} = \frac{M_C\cdot y_1}{I_Z} = \frac{3.5\times10^6\times86}{7.64\times10^6} = 39.40MPa < [\sigma_t]$$

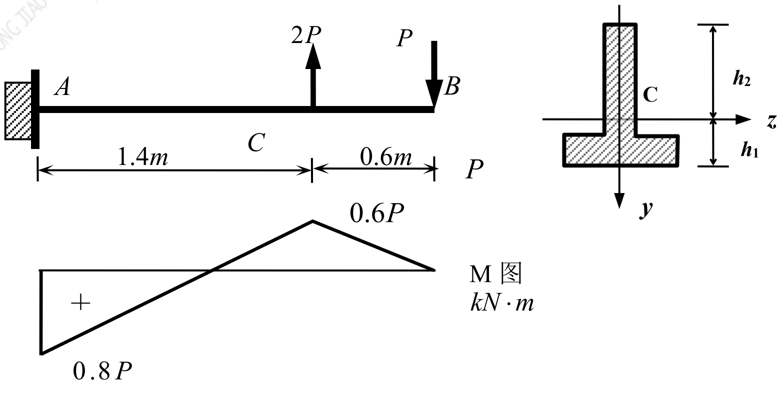
3）A 截面校核

$$\sigma_{c,\max} = \frac{M_{\text{A}}\cdot y_1}{I_Z} = \frac{6\times10^6\times86}{7.64\times10^6} = 67.54MPa < [\sigma_c]$$

$$\sigma_{t,\max} = \frac{M_{\text{A}}\cdot y_2}{I_Z} = \frac{6\times10^6\times54}{7.64\times10^6} = 42.41MPa > 1.05[\sigma_t]$$

综上，梁的强度不满足要求

12、⊥形截面铸铁梁如图所示。若铸铁的许用拉应力为[σ_t]=40 MPa，许用压应力为[σ_c]=160 MPa，截面对形心 z 的惯性矩 I_z=10180 cm^4，h_1=96.4 mm，h_2=153.6mm 试求梁的许用载荷。



解：(1) 画梁的弯矩图

由弯矩图知：可能危险截面是 A 和 C 截面

(2) 强度计算

A 截面的最大压应力

$$\sigma_{C\max}=\frac{M_A h_2}{I_z}=\frac{0.8Ph_2}{I_z}\le[\sigma_C]$$

$$\therefore P\le\frac{I_z[\sigma_C]}{0.8h_2}=\frac{10180\times10^4\times160}{0.8(250-96.4)}=132.6kN$$

A 截面的最大拉应力

$$\sigma_{t\max}=\frac{M_A h_1}{I_z}=\frac{0.8Ph_1}{I_z}\le[\sigma_t]$$

$$\therefore P\le\frac{I_z[\sigma_t]}{0.8h_1}=\frac{10180\times10^4\times40}{0.8\times96.4}=52.8\,kN$$

C 截面的最大拉应力

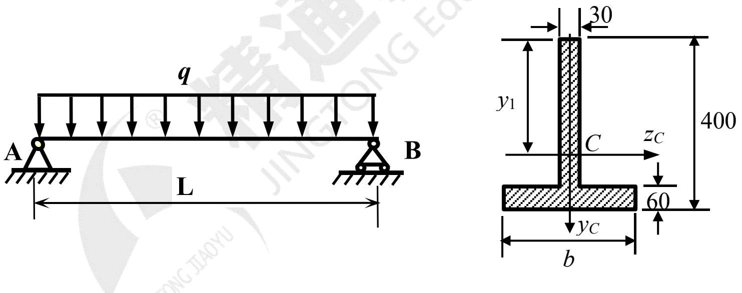
$$\sigma_{t\max}=\frac{M_C h_2}{I_z}=\frac{0.6Ph_2}{I_z}\le[\sigma_t]$$

$$\therefore P\le\frac{I_z[\sigma_t]}{0.6h_2}=\frac{10180\times10^4\times40}{0.6(250-96.4)}=44.2kN$$

取许用载荷值

$$[P]=44.2kN$$

13、图示横截面为⊥形的铸铁简支梁受力如图，材料的拉伸和压缩许用应力之比为 $[\sigma_t]/[\sigma_c]=1/3$。求水平翼缘的合理宽度 *b*。



解：(1) 梁中横截面的上部受压，下部受拉，危险截面在跨中，最大拉应力和最大压应力

$$\sigma_{t,\max}=\frac{M_{\max}(400-y_1)}{I_z}\qquad\sigma_{c,\max}=\frac{M_{\max}y_1}{I_z}$$

B 的合理宽度应使危险截面上下边缘同时达到许用应力，即：

$$\frac{\sigma_{t,\max}}{\sigma_{c,\max}}=\frac{400-y_1}{y_1}=\frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}=\frac{1}{3}$$

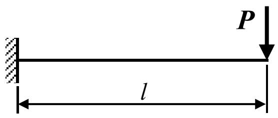
$$y_1=300\ mm$$

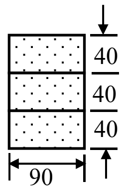
(2) 由截面形心位置

$$y_1=\frac{\sum A_i y_{Ci}}{\sum A_i}=\frac{30\times(400-60)\times 170+b\times 60\times 370}{30\times(400-60)+b\times 60}=300$$

$$b=316mm$$

14、由三根木条胶合而成的悬臂梁截面尺寸如图所示，跨度 l=0.5 m。若胶合面上的许用切应力为[τ_l]=0.5 MPa，木材的许用弯曲正应力为[σ]=10 MPa，许用切应力为[τ]=1.0MPa，试求许可载荷 P。





解：(1) 截面上的最大剪力和弯矩

$$V_{max}=P \qquad M_{max}=Pl$$

(2) 按弯曲正应力强度条件确定许用荷载

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W}=\frac{Pl}{\frac{1}{6}bh^2}\le[\sigma]$$

$$P\le\frac{[\sigma]bh^2}{6l}=\frac{10\times 90\times 120^2}{6\times 0.5\times 10^3}=4.32\ kN$$

(3) 按木材弯曲切应力强度条件确定许可荷载

$$\tau_{max}=\frac{3}{2}\frac{V_{max}}{A}=\frac{3}{2}\frac{P}{bh}\le[\tau]$$

$$P\le\frac{2[\tau]bh}{3}=\frac{2\times 1\times 90\times 120}{3}=7.2\ kN$$

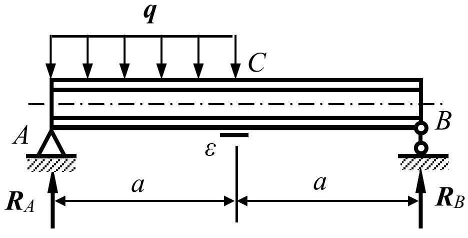
(4)按胶合面上切应力强度确定许可荷载

$$\tau_{胶缝}=\frac{V_{max}S_z^*}{I_z b}\le[\tau_1]$$

$$P\le\frac{[\tau_1]\frac{bh^3}{12}\times b}{S_z^*}=\frac{0.5\times 90^2\times 120^3}{12\times 90\times 40\times 40}=4.05kN$$

综上，结构的许可载荷：[P]=4.05 kN。

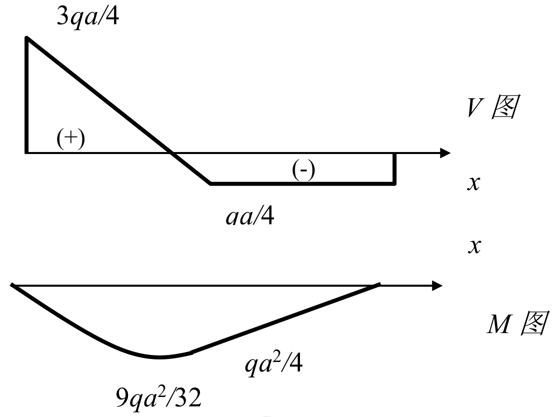
15、图示简支梁，由 No28 工字钢制成，在集度为 q 的均布载荷作用下，测得横截面 C 底边的纵向正应变ε=3.0×10^{-4}，试计算梁内的最大弯曲正应力，已知钢的弹性模量 E=200 Gpa，a=1 m。



解：(1) 求支反力

$$R_A = \frac{3}{4}qa \qquad R_B = \frac{1}{4}qa$$

(2) 画内力图



(3) 由胡克定律求得截面 C 下边缘点的拉应力为：

$$\sigma^{+}_{C\max} = \varepsilon \cdot E = 3.0\times10^{-4}\times200\times10^{9} = 60\ MPa$$

也可以表达为：

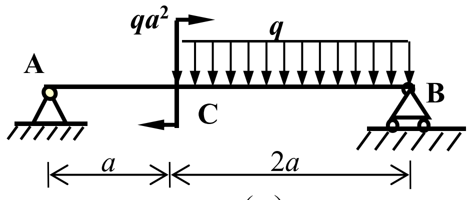
$$\sigma^{+}_{C\max} = \frac{M_C}{W_z} = \frac{\frac{qa^2}{4}}{W_z}$$

(4) 梁内的最大弯曲正应力：

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{\frac{9qa^2}{32}}{W_z} = \frac{9}{8}\sigma^{+}_{C\max} = 67.5\ MPa$$

第七章 弯曲变形

1、用积分法求图示各梁的挠曲线方程时，需分几段列方程？试写出确定积分常数的边界条件及变形连续条件。

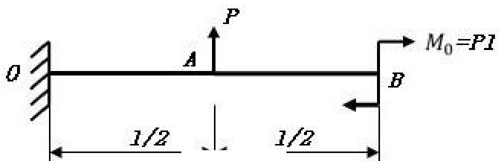


（a）

解：（a）需分两段列方程。

边界条件： $v_A=0 \quad v_B=0$

连续条件：$v_{CL}=v_{CR} \quad \theta_{CL}=\theta_{CR}$

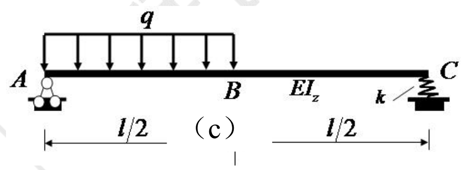


（b）

（b）分两段 OA、AB

边界条件： $v_O=0 \quad \theta_O=0$

连续条件：$v_{A^-}=v_{A^+} \quad \theta_{A^-}=\theta_{A^+}$



（c）

（c）应分为 AB、BC 两段

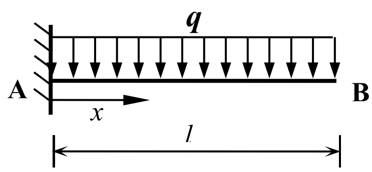
边界条件：$x=0 \quad \upsilon_A=0$

$$x=l \quad \upsilon_C=\frac{R_c}{k}=\frac{ql}{8k}$$

连续条件：

$$x=0.5l \quad \upsilon_{B^-}=\upsilon_{B^+} \qquad \theta_{B^-}=\theta_{B^+}$$

2、用积分法求图示悬臂梁的挠曲线方程和转角方程。



解：$M(x)=-\frac{q}{2}(l-x)^2$

$$EIv''(x)=-M(x)=\frac{q}{2}(l-x)^2$$

$$EIv'(x)=-\frac{q}{6}(l-x)^3+C$$

$$EIv(x)=\frac{q}{24}(l-x)^4+Cx+D$$

边界条件：x=0 时，v（0）=0；θ（0）=0

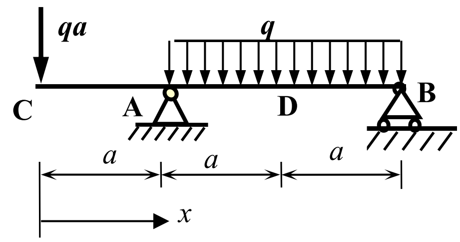
解得 $C=\frac{ql^3}{6}$； $D=-\frac{ql^4}{24}$

梁的转角方程和挠曲线方程分别为

$$\theta(x)=v'(x)=-\frac{q}{6EI}(l-x)^3+\frac{ql^3}{6EI}$$

$$EIv(x)=\frac{q}{24}(l-x)^4+\frac{ql^3}{6EI}x-\frac{ql^4}{24EI}$$

3、 用积分法求图示梁 D 截面的挠度和 C 截面的转角。



解：（1）求支反力

$$R_A = \frac{5}{2}qa(\uparrow) \quad R_B = \frac{1}{2}qa(\uparrow)$$

（2）分段列方程

CA 段：$M_1(x) = -qax \quad (0 \le x \le a)$

AB 段：

$$M_2(x) = -qax - \frac{1}{2}q(x-a)^2 + \frac{5}{2}qa(x-a)$$

$$= -\frac{1}{2}q(x-a)^2 + \frac{3}{2}qa(x-a) - qa^2 \quad (a \le x \le 3a)$$

（3）代入微分关系并积分

CA 段：

$$EIv_1''(x) = -M_1(x) = qax$$

$$EIv_1'(x) = \frac{1}{2}qax^2 + \mathrm{C}_1 \qquad EIv_1(x) = \frac{1}{6}qax^3 + \mathrm{C}_1x + D_1$$

AB 段

$$EIv_2''(x) = -M_2(x) = \frac{1}{2}q(x-a)^2 - \frac{3}{2}qa(x-a) + qa^2$$

$$EIv_2'(x) = \frac{1}{6}q(x-a)^3 - \frac{3}{4}qa(x-a)^2 + qa^2(x-a) + C_2$$

$$EIv_2(x) = \frac{1}{24}q(x-a)^4 - \frac{1}{4}qa(x-a)^3 + \frac{1}{2}qa^2(x-a)^2 + C_2(x-a) + D_2$$

代入边界条件和光滑连续条件：

$$EIv_1(a) = \frac{1}{6}qa^3 + \mathrm{C}_1a + D_1 = 0$$

$$EIv_2(a) = D_2 = 0$$

$$EIv_2(3a) = \frac{q}{24}(2a)^4 - \frac{qa}{4}(2a)^3 + \frac{1}{2}qa^2 \times (2a)^2 + C_2 \times 2a + D_2 = 0$$

$$EIv_1'(a) = \frac{1}{2}qa \times a^2 + \mathrm{C}_1 = EIv'(a) = C_2$$

解得：

$$C_1 = -\frac{5}{6}qa^3 \quad D_1 = \frac{2}{3}qa^4 \quad C_2 = -\frac{1}{3}qa^3 \quad D_2 = 0$$

故有：

$$EIv_1''(x) = -M_1(x) = qax$$

$$EIv_1'(x) = EI\theta_1(x) = \frac{1}{2}qax^2 - \frac{5}{6}qa^3 \qquad EIv_1(x) = \frac{1}{6}qax^3 - \frac{5}{6}qa^3x + \frac{2}{3}qa^4$$

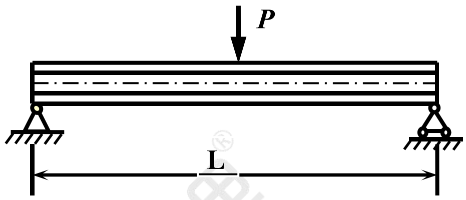
$$EIv_2'(x) = \frac{1}{6}q(x-a)^3 - \frac{3}{4}qa(x-a)^2 + qa^2(x-a) - \frac{1}{3}qa^3$$

$$EIv_2(x)=\frac{1}{24}q(x-a)^4-\frac{1}{4}qa(x-a)^3+\frac{1}{2}qa^2(x-a)^2-\frac{1}{3}qa^3(x-a)$$

所以：

$$\theta_C=\theta_1(0)=-\frac{5qa^3}{6EI}\qquad v_D=v_2(2a)=\frac{qa^4}{8EI}$$

4、如图所示桥式起重机的最大载荷为 P=20kN，起重机大梁为 32a 工字钢，E=210Gpa，L=8.76cm。规定[*f*]=*L*/500，校核大梁的刚度。(I=11100(cm^4)　$f_{\max}=\frac{Pl^3}{48EI}$)

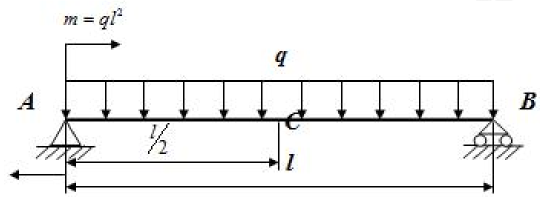


解：

$$f_{\max}=\frac{Pl^3}{48EI}=\frac{20\times10^3\times0.0876^2 l}{48\times210\times10^9\times11100\times10^{-8}}=\frac{l}{730}\le[f]=\frac{l}{500}$$

可见符合刚度要求

5、简支梁上作用均布载荷 q 以及集中力偶 ，试用叠加法求梁跨中截面的挠度及两端截面 A、B 的转角。

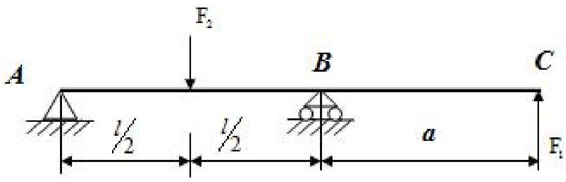


解：$\mathrm{v_C}=(\mathrm{v_C})_q+(\mathrm{v_C})_m=\frac{5ql^4}{384\mathrm{EI}}+\frac{ql^4}{16\mathrm{EI}}=\frac{29ql^4}{384\mathrm{EI}}$

$$\theta_\mathrm{A}=(\theta_\mathrm{A})_\mathrm{q}+(\theta_\mathrm{A})_m=\frac{ql^3}{24\mathrm{EI}}+\frac{ql^3}{3\mathrm{EI}}=\frac{9ql^3}{24\mathrm{EI}}$$

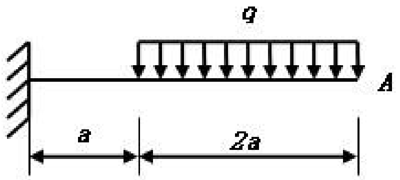
$$\theta_\mathrm{B}=(\theta_\mathrm{B})_q+(\theta_\mathrm{B})_m=\frac{ql^3}{24\mathrm{EI}}-\frac{ml}{6\mathrm{EI}}=-\frac{5ql^3}{24\mathrm{EI}}$$

6、如图所示截面外伸梁，EI=常数。使用叠加法求截面 B 的转角和端点 C 的挠度。

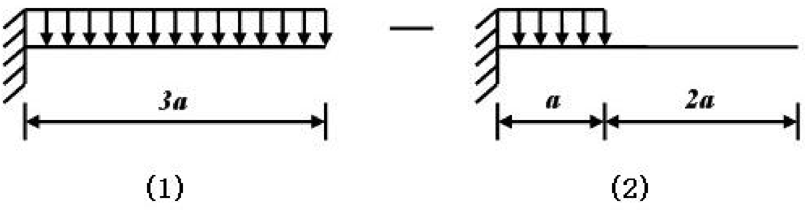


（参考答案：$\theta_\mathrm{B}=-\frac{F_1al}{3\mathrm{EI}}-\frac{F_2l^2}{16\mathrm{EI}}$、$v_C=v_{C_1}+v_{C_2}=-\frac{F_1a^2}{3\mathrm{EI}}(a+l)-\frac{F_2al^2}{16\mathrm{EI}}$）

7、用叠加法求如图所示梁截面 A 的挠度和转角。EI 为已知常数。



解：可分解为如下两图相减后的效果

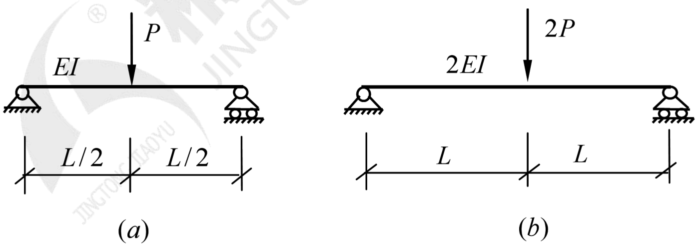


查表得 $\theta_1 = -\dfrac{q(3a)^3}{6EI} = -\dfrac{9qa^3}{2EI}$ 显然 $\theta_2 = -\dfrac{qa^3}{6EI}$

$$y_1 = -\frac{q(3a)^4}{8EI} = -\frac{81qa^4}{8EI} \qquad y_2 = -\frac{qa^4}{8EI} + \theta_2 a = -\frac{11qa^4}{24EI}$$

则 $\theta = \theta_1 - \theta_2 = -\dfrac{13qa^3}{3EI}$ $\quad y = y_1 - y_2 = -\dfrac{24qa^4}{3EI}$

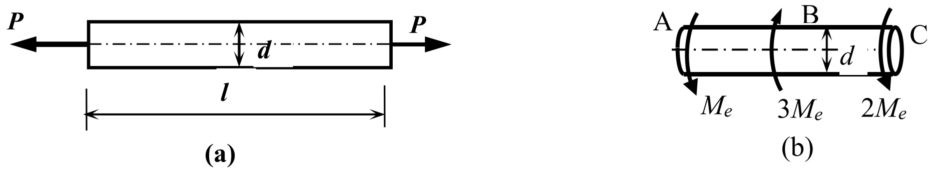
8、如图所示为两根材料相同的简支梁，求两梁中点的挠度之比 w_a / w_b。



解：$\dfrac{wa}{wb} = \dfrac{kPL^3}{EI} / \dfrac{k2P(2L)^3}{2EI} = \dfrac{1}{8}$

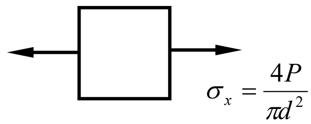
第九章　应力状态分析和强度理论

1、构件受力如图所示，（1）确定危险点的位置，（2）用单元体表示危险点的应力状态。

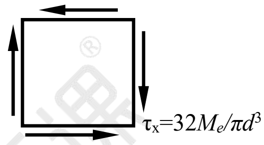


(a)　　(b)

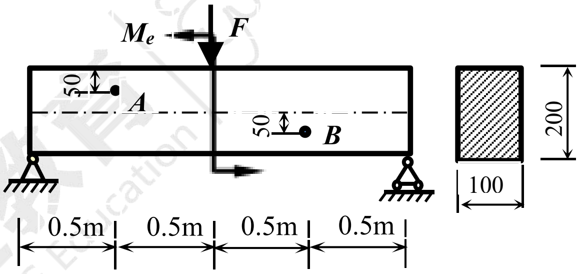
解：（1）图（a）杆中任一点都是危险点，应力状态为



（2）图（b）中构件为纯扭转，BC 段外表面任意点都是危险点，应力状态为



2、简支梁的受力及尺寸如图所示，已知：M_e=160kN.m，F=160kN。试求 A、B 两点的应力分量，并用单元体表示。



解：（1）求支反力

$R_1 = 120\text{kN}$（↑）

$R_2 = 40\text{kN}$（↑）

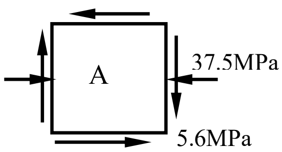
（2）内力和应力分析

A 点所在截面的内力和应力

$V = 120\text{kN}$

$\text{M} = 120 \times 0.5 = 60\text{kN.m}$

$$\sigma_x = \frac{M \cdot y_A}{I_Z} = \frac{M \cdot y_A}{\dfrac{bh^3}{12}} = -\frac{60 \times 10^6 \times 50}{\dfrac{100 \times 200^3}{12}} = -37.5\ MPa$$



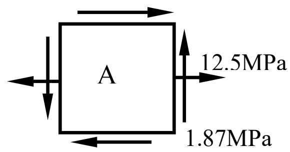
$$\tau_x = \frac{V \cdot S^*_{zA}}{I_Z b} = \frac{120 \times 10^3 \times 50 \times 100 \times 75}{\dfrac{100 \times 200^3}{12} \times 100} = 5.6 MPa$$

点 B 所在横截面上的内力和应力为

$V = -40\text{kN}$

$\text{M} = 40 \times 0.5 = 20\text{kN.m}$

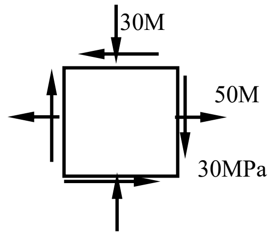
点 B 所在横截面上的内力和应力为



$$\sigma_x = \frac{M \cdot y_B}{I_Z} = \frac{20 \times 10^6 \times 50}{\dfrac{100 \times 200^3}{12}} = 12.5\ MPa$$

$$\tau_x = \frac{V \cdot S^*_{zA}}{I_Z b} = -\frac{40 \times 10^3 \times 50 \times 100 \times 75}{\dfrac{100 \times 200^3}{12} \times 100} = -1.87 MPa$$

3、求图示单元体的主应力和主方向、最大剪应力。



解：由图可知：

$\sigma_x=50\text{MPa}$　　$\sigma_y=-30\text{MPa}$　　$\tau_x=30\text{MPa}$

则主应力：

$$\sigma_{ps}=\begin{cases}\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x{}^2}\\ 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{50-30}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{50+30}{2}\right)^2+30^2}\\ 0\end{cases}=\begin{cases}60\\ 0\\ -40\end{cases}$$

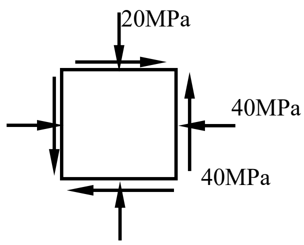
∴ $\sigma_1=60\text{MPa}$　　$\sigma_2=0$　　$\sigma_3=-40\text{MPa}$

主平面方位角：$\tan\alpha_0=-\dfrac{2\tau_x}{\sigma_x-\sigma_y}=\dfrac{-60}{50+30}=-0.75$

$\therefore\alpha_0=-18.4^\circ$　　$\alpha_0+90^\circ=71.6^\circ$

最大剪应力：$\tau_{\max}=\dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=50MPa$

4、已知应力状态如图所示，图中应力单位皆为 MPa。试求： 1) 主应力大小； 2) 主平面位置；3) 绘出主单元体及主应力方向；4) 单元体的最大剪应力。



解：由图可知：

$\sigma_x=-40\text{MPa}$　　$\sigma_y=-20\text{MPa}$　　$\tau_x=-40\text{MPa}$

则：（1）主应力：

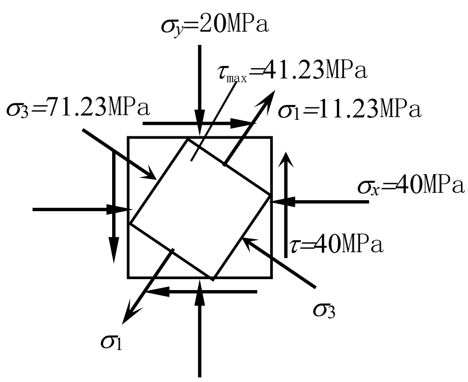
$$\sigma_{ps}=\begin{cases}\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x{}^2}\\ 0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{-40-20}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{-40+20}{2}\right)^2+40^2}\\ 0\end{cases}=\begin{cases}-30\pm41.2\\ 0\end{cases}$$

∴ $\sigma_1=11.2\text{MPa}$　　$\sigma_2=0$　　$\sigma_3=-71.2\text{MPa}$

（2）$\tan\alpha_0=-\dfrac{2\tau_x}{\sigma_x-\sigma_y}=\dfrac{80}{-20}=-4$

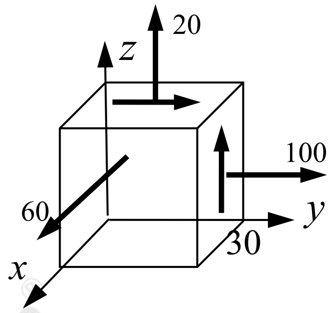
$\therefore\alpha_0=-38^\circ$　　$\alpha_0+90^\circ=52^\circ$

（3）主单元体及主应力方向如图所示。



（4）$\tau_{\max}=\dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=41.2MPa$

5、已知某点处的应力状态如图所示，弹性模量 $E=200\text{GPa}$，泊松比 $\nu=0.25$，求该点处的三个主应力及最大线应变（应力单位为 MPa）。



解：分析单元体可知

σ_x =100MPa　　σ_y=20MPa　　τ_x=－30MPa　　σ_z=60MPa

根据主平面的性质

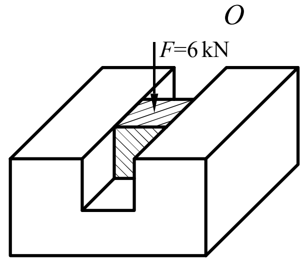
$$\sigma_{ps}=\begin{cases}\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^{\ 2}}\\ 60\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{100+20}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{100-20}{2}\right)^2+30^2}\\ 60\end{cases}=\begin{cases}60\pm50\\ 60\end{cases}$$

$s_1=110\text{MPa}$，　$s_2=60\text{MPa}$，　$s_3=10\text{MPa}$

$$\varepsilon_{\max}=\frac{1}{E}[\sigma_1-\nu(\sigma_2+\sigma_3)]=\frac{1}{200'\ 10^3}[110-0.25(60+10)]=4.63'\ 10^{-4}$$

6、一体积为 $10\times10\times10\ \text{mm}^3$ 的立方铝块，将其放入宽为 $10\ \text{mm}$ 的刚性槽中。已知铝的泊松比 $\nu=0.33$，求铝块的三个主应力。



解：（1）应力状态分析

$\sigma_y=-\dfrac{6\times10^3}{10\times10}=-60\text{MPa}$　$\sigma_z=0$　σ_x未知

（2）应变分析

$\varepsilon_x=0$

（3）由广义胡克定律

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu\left(\sigma_y+\sigma_z\right)\right]=\frac{1}{E}\left(\sigma_x+0.33\times60\right)=0$$

$\sigma_x=-19.8MPa$

综上：$\sigma_1=0$　$\sigma_2=-19.8MPa$　$\sigma_3=-60MPa$

7、试对给定应力状态：$\sigma_x=212\text{MPa}$、$\sigma_y=-212\text{MPa}$、$\tau_{xy}=212\text{MPa}$，确定材料是否失效：

（1）对脆性材料用最大拉应力理论，若已知材料 $\sigma_{\mathrm{b}}=300\mathrm{MPa}$；

（2）对塑性材料用最大切应力理论及形状改变比能理论，若已知材料 $\sigma_{\mathrm{s}}=500\mathrm{MPa}$。

解:

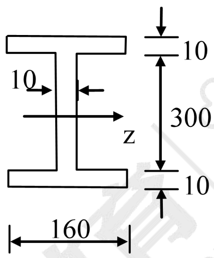
$$\sigma_{\mathrm{ps}}=\begin{cases}\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}{}^2}\\0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{212-212}{2}\pm\sqrt{\dfrac{212+212}{2}+212^2}\\0\end{cases}=\begin{cases}299.8\mathrm{MPa}\\-299.8MPa\\0\end{cases}$$

$$\therefore\sigma_1=299.8Mpa,\quad\sigma_2=o,\quad\sigma_3=-299.8Mpa$$

（1）脆性材料：$\sigma_{r1}=\sigma_1=299.8Mpa<\sigma_b$ 故材料未失效

（2）塑像材料：$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=299.8-(-299.8)=599.6Mpa>\sigma_s$ 故材料失效

8、工字型截面钢梁，$[\sigma]=170\mathrm{MPa}$，$I_z=9940\mathrm{cm}^4$，危险截面上 $\mathrm{V}=180\mathrm{kN}$，$M=100\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$。校核梁的正应力及相当应力强度。（用第三强度理论）



解答：先对上下边缘进行正应力强度校核：

$$\sigma_{\max}=\frac{My_{\max}}{I}=\frac{100\times10^6\times160}{9940\times10^4}=161Mpa<[\sigma]=170Mpa$$

其次对胶板翼缘与腹板交界点进行强度校核

$$\sigma_x=\frac{My}{I_z}=\frac{100\times10^6\times150}{9440\times10^4}=151Mpa,\quad\sigma_y=0$$

$$\tau_x=\tau=\frac{VS_z^*}{I_zb}=\frac{180\times10^3\times160\times10\times155}{9440\times10^4\times10}=45Mpa$$

$$\sigma_{\mathrm{ps}}=\begin{cases}\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_x{}^2}\\0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{151}{2}\pm\sqrt{(\dfrac{151}{2})^2+45^2}\\0\end{cases}=\begin{cases}163.4\mathrm{MPa}\\-12.4\mathrm{MPa}\\0\end{cases}$$

$$\therefore\sigma_1=163.4Mpa,\quad\sigma_2=0Mpa,\quad\sigma_3=-12.4Mpa$$

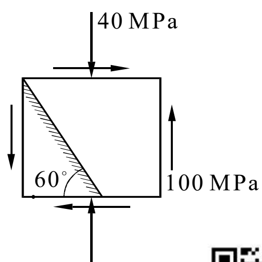
$$\therefore\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=176Mpa>[\sigma]$$

但，$\dfrac{176-170}{170}=3.5\%<5\%$ 所以安全

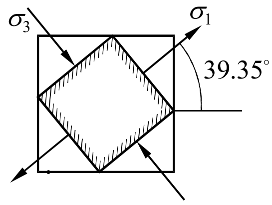
9、图示单元体，试求

(1) 指定斜截面上的应力；

(2) 主应力大小及主平面位置，并将主平面标在单元体上。



解：(1) $\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = -40MPa \quad \tau_x = -100MPa \quad \alpha = 30^\circ$



$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha = 76.6 \text{ MPa}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha = -32.7 \text{ MPa}$$

(2) $$\begin{matrix}\sigma_{\max} \\ \sigma_{\min}\end{matrix} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_x{}^2} = \begin{matrix}81.98 \\ -121.98\end{matrix} \text{MPa}$$

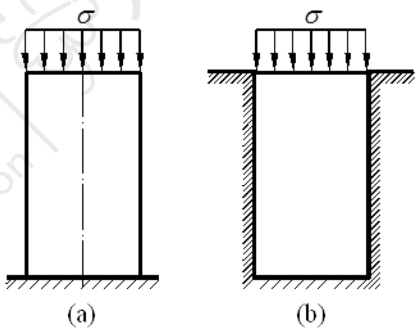
$$\sigma_1 = 81.98\text{MPa}，\ \sigma_2 = 0，\ \sigma_3 = -121.98\text{MPa}$$

$$\alpha_0 = 39.35^\circ$$

10、图示正方形截面棱柱体，弹性常数 E 、ν 均为已知。试比较在下列两种情况下的相当应力 σ_{r3} 。

(a) 棱柱体自由受压；

(b) 棱柱体在刚性方模内受压。



解：(a) $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$，$\sigma_3 = -\sigma$

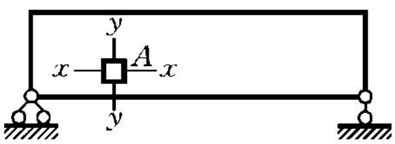
$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma$$

(b) $\sigma_3 = -\sigma$， $\quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$

所以 $\sigma_1 = \sigma_2 = -\dfrac{\nu\sigma}{(1-\nu)}$

所以 $\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = -\dfrac{\nu\sigma}{(1-\nu)} + \sigma = \dfrac{(1-2\nu)\sigma}{(1-\nu)}$

11、列车通过钢桥时，在钢桥横梁的 A 点用应变仪测得 $\varepsilon_x=0.4\times10^{-3}$，$\varepsilon_y= -0.12\times10^{-3}$ ，已知：E=200GPa，μ=0.3。试求 A 点的 x-x 及 y-y 方向的正应力。



解：A 点为平面应力状态，由广义胡克定律

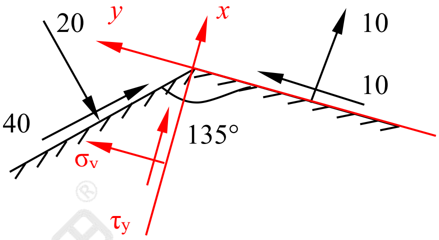
$$e_x = \frac{1}{E}(s_x - m s_y) \qquad e_y = \frac{1}{E}(s_y - m s_x)$$

$$s_x = \frac{E}{1-m^2}(e_x + me_y) = \frac{200´\ 10^9}{1-0.3^2} \quad (0.4 \quad 0.3创0.12) \quad 10^{-3} = 80MPa$$

$$s_y = \frac{E}{1-m^2}(e_y + me_x) = \frac{200´\ 10^9}{1-0.3^2} \quad (\quad 0.12 + 0.3创0.4) \quad 10^{-3} = 0$$

12、受力体某点两平面上的应力如图所示，求其主应力大小。（单位：MPa）

解：设



σ_x =10MPa　τ_x=－10MPa

由图可知

$\sigma_{45°}$ =－20MPa　　$\tau_{45°}$ =40MPa

而

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cdot \cos(90^\circ) - \tau_x \sin(90^\circ)$$

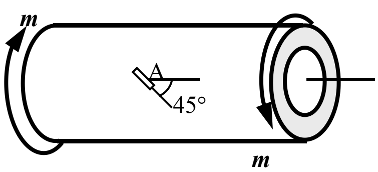
$$= \frac{10 + \sigma_y}{2} + 10 = -20$$

解得　$\sigma_y = -70MPa$

$$\sigma_{ps} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^{\ 2}} = \frac{10-70}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10+70}{2}\right)^2 + 10^2} = -30 \pm 41.2$$

$\sigma_1 = 11.2MPa \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -71.2MPa$

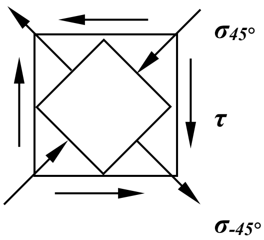
13、今测得受扭空心圆轴表面 A 点与轴线成 45°方向的线应变 ε_0，空心圆轴外径为 D，内外径之比为 α。试求力偶矩 m 之值。已知材料常数 E 和 ν。



解：A 点应力状态如图所示

剪应力：

$$\tau = \frac{m}{W_t} = \frac{m}{\frac{\pi D^3}{16} \times (1-\alpha^4)} = \frac{16m}{\pi D^3(1-\alpha^4)}$$



$$\sigma_{-45^\circ} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cdot \cos(-90^\circ) = \tau$$

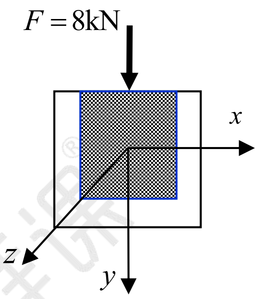
$$\sigma_{45^\circ} = -\tau$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{E}(\sigma_{-45^\circ} - \nu \cdot \sigma_{45^\circ}) = \frac{1+\nu}{E} \cdot \tau$$

$$\tau=\frac{E\cdot\varepsilon_0}{1+\nu}\qquad 即：\frac{16m}{\pi D^3\left(1-\alpha^4\right)}=\frac{E\cdot\varepsilon_0}{1+\nu}$$

$$m=\frac{E\cdot\pi D^3\left(1-\alpha^4\right)\cdot\varepsilon_0}{16(1+\nu)}$$

14、边长为 20mm 的钢立方体置于钢模中恰好不留空隙，在顶面上受力 F=20kN 作用。已知，E=200GPa，ν=0.3，试求钢块的三个主应力、最大剪应力。



解：　由题意：

$$\sigma_y=-\frac{F}{A}=-\frac{20\times10^3}{20\times20}=-50MPa$$

再由广义胡克定律：

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu\left(\sigma_y+\sigma_z\right)\right]=0$$

即　$\sigma_x-0.25\times(-50+\sigma_z)=0$　①

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}\left[\sigma_z-\nu\left(\sigma_y+\sigma_x\right)\right]=0$$

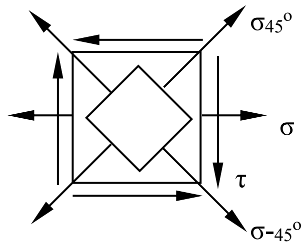
$\sigma_z-0.25\times(-50+\sigma_x)=0$　②

由①②两式联立即可解出　$\sigma_x=\sigma_z=-21.43\text{MPa}$

三个主应力分别为：$\sigma_1=\sigma_2=-21.43\text{MPa}$，$\sigma_3=-50\text{MPa}$

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=\frac{-21.43-(-50)}{2}=14.28MPa$$

15．如图所示某点的单元体，已知该点沿着 45^0、-45^0 方向的线应变分别为 a、b，已知弹性模量 E 和波松比μ，求σ、τ的值。



解：$$\varepsilon_{45^\circ}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{45^\circ}-\mu\sigma_{-45^\circ}\right)$$

$$\varepsilon_{-45^\circ}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{-45^\circ}-\mu\sigma_{45^\circ}\right)$$

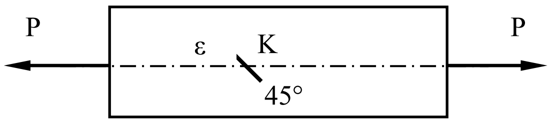
$$\sigma_{45^\circ}=\frac{\sigma}{2}+\frac{\sigma}{2}\cos90^\circ-\tau\sin90^\circ=\frac{\sigma}{2}-\tau$$

$$\sigma_{-45^\circ}=\frac{\sigma}{2}+\frac{\sigma}{2}\cos(-90^\circ)-\tau\sin(-90^\circ)=\frac{\sigma}{2}+\tau$$

解得：$$\sigma=\frac{E(\varepsilon_{45^\circ}+\varepsilon_{-45^\circ})}{1-\mu}=\frac{(a+b)\ E}{1-\mu}$$

$$\tau=-\frac{E(\varepsilon_{45^\circ}-\varepsilon_{-45^\circ})}{2(1+\mu)}=-\frac{(a-b)E}{2(1+\mu)}$$

16、如图所示，由实验测得拉伸试件上点 K 沿与轴线成 45°方向的线应变ε，试求此时试件所受拉力 P。已知试件的横截面面积 A，材料的弹性模量 E 和泊松比μ。



解：由题意可知

K 点所在截面轴力　N=P

正应力：$\sigma=\dfrac{P}{A}$　（单向拉伸应力状态）

$$\sigma_{45^\circ}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\cdot\cos(90^\circ)-\tau_x\sin(90^\circ)=\frac{\sigma}{2}$$

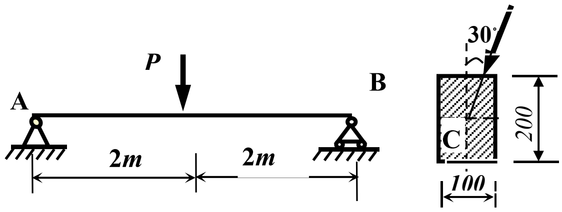
$$\sigma_{-45^\circ}=\frac{\sigma}{2}$$

$$\varepsilon_{-45^\circ}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{-45^\circ}-\mu\cdot\sigma_{45^\circ}\right)=\frac{1-\mu}{2E}\cdot\sigma=\frac{1-\mu}{2E}\frac{P}{\mathrm{A}}$$

$$\therefore\quad P=\frac{2E\mathrm{A}\varepsilon}{1-\mu}$$

第十一章　组合变形

1、图示简支梁，点 C 为截面形心，荷载 P=40 kN，与铅垂方向的夹角为 30°。求梁内的最大正应力。



解：最大弯矩发生在跨中截面

$$M_{z\max}=\frac{1}{2}P_y\times 2=40\cos 30^\circ=34.64kN.m$$

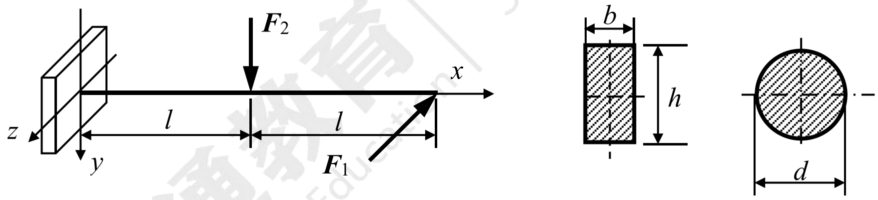
$$M_{y\max}=\frac{1}{2}P_z\times 2=40\sin 30^\circ=20kN.m$$

最大拉应力在截面的右上角，最大压应力在左下角，大小为

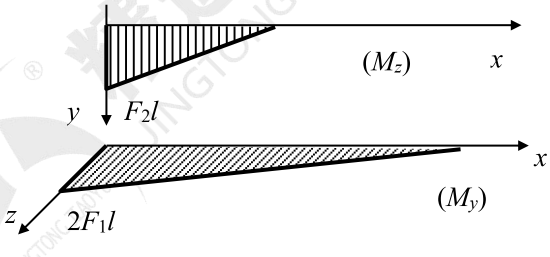
$$\sigma_{\max}=\frac{M_{y\max}}{W_y}+\frac{M_{z\max}}{W_z}=\frac{20\times 10^6\times 6}{200\times 100^2}+\frac{34.64\times 10^6\times 6}{100\times 200^2}=111.96MPa$$

2、 图示悬臂梁，承受载荷 F_1 与 F_2 作用，已知 F_1=800 N，F_2=1.6 kN，l=1 m，许用应力[σ]=160 MPa，试分别在下列两种情况下确定截面尺寸。

(1) 截面为矩形，h=2b；(2) 截面为圆形。



解：(1) 画弯矩图



固定端截面为危险截面

(2) 当横截面为矩形时，依据弯曲正应力强度条件：

$$\sigma_{\max}=\frac{M_x}{W_x}+\frac{M_z}{W_z}=\frac{F_2\cdot l}{\frac{b\cdot h^2}{6}}+\frac{2F_1\cdot l}{\frac{h\cdot b^2}{6}}=\frac{800\times 10^3}{\frac{2b^3}{3}}+\frac{2\times 1.6\times 10^6}{\frac{b^3}{3}}\le[\sigma]=160\ MPa$$

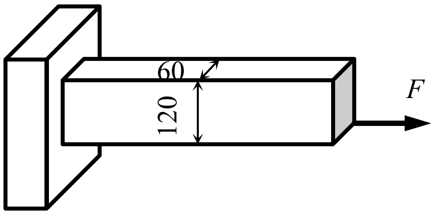
解得：$b=35.6\ mm\quad h=71.2\ mm$

(3) 当横截面为圆形时，依据弯曲正应力强度条件：

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W}=\frac{\sqrt{M_x^{\ 2}+M_z^{\ 2}}}{W}=\frac{\sqrt{(F_2\cdot l)^2+(2F_1\cdot l)^2}}{\frac{\pi\cdot d^3}{32}}=\frac{\sqrt{(800\times 10^3)^2+(2\times 1.6\times 10^6)^2}}{\frac{\pi\cdot d^3}{32}}\le[\sigma]=160\ MPa$$

解得：$d = 52.4\ mm$

3、图示矩形截面杆，受水平拉力 F 作用，已知 F=144kN，许用应力[σ]=160MPa，试校核该杆的强度。



解：危险截面为任意横截面，内力为

$$N = F = 144\ kN$$

$$M_y = F \times \frac{0.06}{2} = 4.32\ kN.m$$

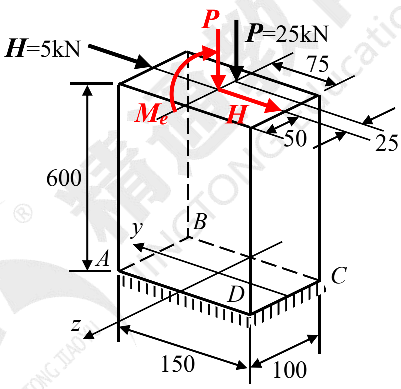
$$M_z = F \times \frac{0.12}{2} = 8.64\ kN.m$$

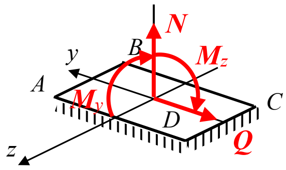
最大应力为拉应力，发生在截面的右下角，大小为

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{144\times10^3}{60\times120} + \frac{6\times4.32\times10^6}{120\times60^2} + \frac{6\times8.64\times10^6}{60\times120^2} = 140\ MPa < [\sigma]$$

所以该杆安全。

4、在力 *P* 和 *H* 联合作用下的短柱如图所示。试求固定端截面上角点 *A*、*B*、*C*、*D* 的正应力。





解：(1) 将力 *P* 和 *H* 向截面形心简化

$$M_e = 25\times10^3 \times 0.025 = 625\ N.m$$

(2) 截面 *ABCD* 上的内力

$$N = -P = -25\ kN$$
$$M_y = M = 625\ N.m$$
$$M_z = H \times 0.6 = 3\ kN.m$$

(3) 截面几何性质

$$A=0.15\times0.1=0.015\ m^2$$

$$W_z=\frac{1}{6}\times0.1\times0.15^2=3.75\times10^{-4}\ m^3$$

$$W_y=\frac{1}{6}\times0.15\times0.1^2=2.5\times10^{-4}\ m^3$$

(4) A 点的正应力

$$\sigma_A=\frac{N}{A}+\frac{M_y}{W_y}+\frac{M_z}{W_z}=\frac{(-25\times10^3)}{0.015}+\frac{625}{2.5\times10^{-4}}+\frac{3000}{3.75\times10^{-4}}$$

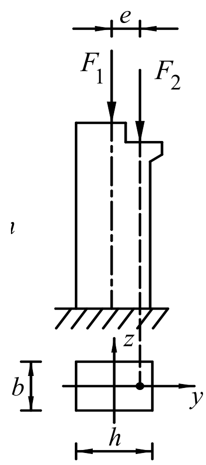
$$=-1.67\times10^6+2.5\times10^6+8\times10^6=8.83\ MPa$$

B 点的正应力 $\sigma_B=\frac{N}{A}-\frac{M_y}{W_y}+\frac{M_z}{W_z}=(-1.67-2.5+8)\times10^6=3.83\ MPa$

C 点的正应力 $\sigma_C=\frac{N}{A}-\frac{M_y}{W_y}-\frac{M_z}{W_z}=(-1.67-2.5-8)\times10^6=-12.17\ MPa$

D 点的正应力 $\sigma_D=\frac{N}{A}+\frac{M_y}{W_y}-\frac{M_z}{W_z}=(-1.67+2.5-8)\times10^6=-7.17\ MPa$

5、矩形截面受压柱如图所示，其中 F_1 的作用线与柱轴线重合，F_2 的作用点位于 y 轴上，已知 $F_1=F_2=80kN$，$b=240mm$，偏心距 $e=100mm$。试求柱的横截面上不出现拉应力时 h 的最小值，并在 h 确定后，求柱横截面上的最大压应力。



解：将 F_2 平移到柱轴线上，则柱为轴向压缩与弯曲的组合变形。

$N=-F_1-F_2=-160kN$　　　$M_z=F_2e=8kN\cdot m$

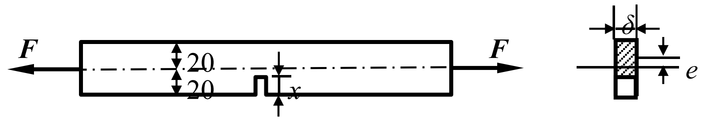
横截面上不出现拉应力 h 取最小值时中性轴位于截面左侧边缘

$$\sigma=\frac{N}{A}+\frac{M_z}{W_z}=-\frac{160\times10^3}{240h}+\frac{8\times10^6}{\frac{240h^2}{6}}=0$$

$$h=300mm$$

此时，$\sigma_{c\max}=\frac{N}{A}-\frac{M_z}{W_z}=-\frac{160\times10^3}{240\times300}-\frac{8\times10^6}{\frac{240\times300^2}{6}}=-4.44MPa$

6、图示板件，载荷 F=12 kN，许用应力[σ] =100 MPa，试求板边切口的允许深度 x。（δ=5 mm）



解：(1) 切口截面偏心距和抗弯截面模量：

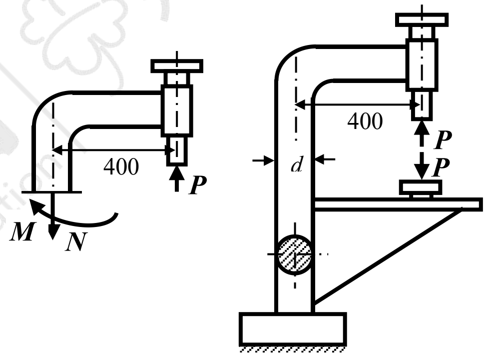
$$e=\frac{x}{2}\qquad W=\frac{\delta\left(40-x\right)^2}{6}$$

(2) 切口截面上发生拉弯组合变形；

$$\sigma_{\max}=\frac{Fe}{W}+\frac{F}{A}=\frac{12\times10^3\times\frac{x}{2}}{\frac{5\times(40-x)^2}{6}}+\frac{12\times10^3}{5\times(40-x)}=100MPa$$

解得： $x=5.2\ mm$

7、图示钻床的立柱为铸铁制成，P=15 kN，许用拉应力为[σ_t]=35 MPa。试确定立柱所需要的直径 d。



解：(1) 内力分析

作截面取上半部分，由静力平衡方程可得

$$N=P=15kN\qquad M=0.4P=6kNm$$

所以立柱发生拉弯变形。

(2) 强度计算

先考虑弯曲应力

$$\sigma_{t\max}=\frac{M}{W}=\frac{32M}{\pi d^3}\le[\sigma_t]$$

$$d\ge\sqrt[3]{\frac{32M}{\pi[\sigma_t]}}=\sqrt[3]{\frac{32\times6\times10^3}{\pi\times35\times10^6}}=120.4\ mm$$

取立柱的直径 $d=122$ mm，校核其强度

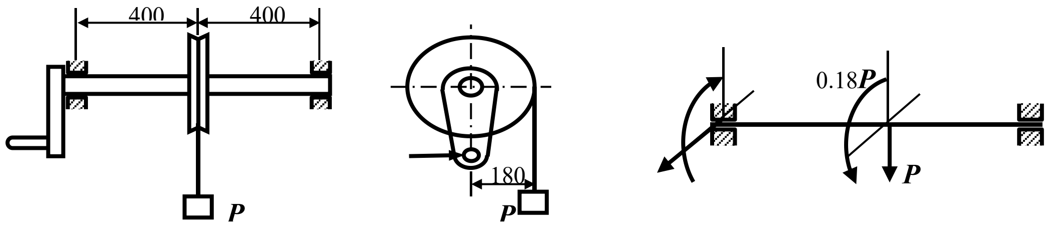
$$\sigma_{t\max}=\frac{N}{A}+\frac{M}{W}=\frac{4N}{\pi d^2}+\frac{32M}{\pi d^3}=\frac{4\times15\times10^3}{\pi\times0.122^2}+\frac{32\times6\times10^3}{\pi\times0.122^3}$$
$$=1.28+33.66=34.94MPa<[\sigma_t]$$

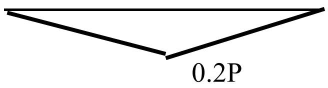
立柱满足强度要求。

注：在组合变形的截面几何尺寸设计问题中，先根据主要变形设计，然后适当放宽尺寸进行强度校核，这是经常使用的方法。

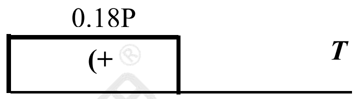
8、图示手摇铰车的轴的直径 d=30 mm，材料为 Q235 钢，[σ]=80 MPa。试按第三强度理论

求铰车的最大起重量 P。





解：(1) 轴的计算简图



画出铰车梁的内力图

危险截面在梁中间截面左侧

$$M_{\max} = 0.2P \qquad T = 0.18P$$

(2) 强度计算

第三强度理论

$$\sigma_{r3} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} = \frac{32}{\pi d^3}\sqrt{(0.2P)^2 + (0.18P)^2} \le [\sigma]$$

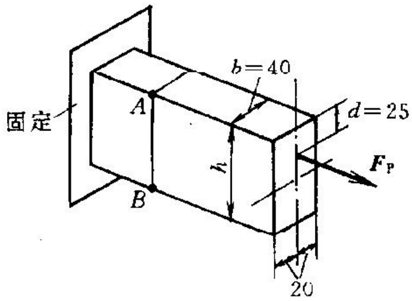
$$P \le \frac{\pi d^3 [\sigma]}{32\sqrt{(0.2)^2 + (0.18)^2}} = \frac{\pi \times 0.03^3 \times 80 \times 10^6}{32\sqrt{(0.2)^2 + (0.18)^2}} = 788N$$

所以铰车的最大起重量为 788N

9、图示矩形截面杆在自由端承受位于纵向对称面内的纵向载荷 F_P，已知 $F_P = 60$kN。试求：

（1）横截面上点 A 的正应力取最小值时的截面高度 h

（2）在上述 h 值下点 A 的正应力值。



解： $\sigma_A = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{F_P}{40h} + \frac{F_P(\frac{h}{2} - d)}{\frac{40h^2}{6}}$

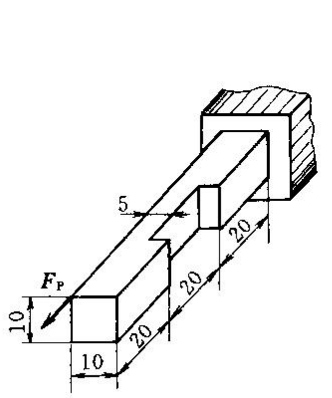
$$= \frac{F_P}{20}\left(\frac{2h - 3d}{h^2}\right)$$

（1）令 $\frac{\partial \sigma_A}{\partial h} = 0$， $\frac{6hd - 2h^2}{h^4} = 0$

∴ $h = 3d = 75$mm

（2） $\sigma_A = \frac{60 \times 10^3}{20}\left(\frac{2 \times 75 - 3 \times 25}{75^2}\right) = 40$MPa

10、正方形截面杆一端固定，另一端自由，中间部分开有切槽。



杆自由端受有平行于杆轴线的纵向力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$。若已知 F_{P} =1kN，杆各部分尺寸示于图中。试求杆内横截面上的最大正应力，并指出其作用位置。

解：(1)切槽处

内力

N= 1 kN

$$M_z = 1000\times5\times10^{-3} = 5\ \mathrm{N\cdot m}$$

$$M_y = 1000\times2.5\times10^{-3} = 2.5\ \mathrm{N\cdot m}$$

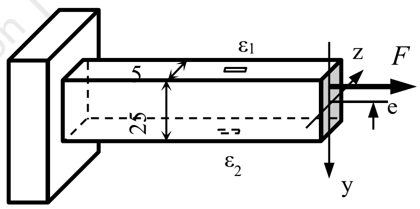
$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A}+\frac{M_y}{W_y}+\frac{M_z}{W_z} = \frac{1000}{10\times5}+\frac{2.5\times10^3\times6}{10\times5^2}+\frac{5\times10^3\times6}{5\times10^2} = 140\,\mathrm{MPa}$$

（2）无切槽部位

$$\sigma_{\max}{}' = \frac{N}{A}+\frac{M_{y1}}{W_y}+\frac{M_z}{W_z} = \frac{1000}{10\times5}+\frac{5\times10^3\times6}{10\times10^2}+\frac{5\times10^3\times6}{10\times10^2} = 80\mathrm{MPa}$$

综上：最大正应力为 140MPa，作用位置位于中间开有切槽的横截面的左上角点。

11、图示矩形截面杆，受偏心距为 e 的拉力 F 作用，y、z 为对称轴。测得上、下表面的正应变分别为ε_1=0.01 和ε_2=0.004，材料的弹性模量 E=200GPa，试求拉力 F 和偏心距 e。



解：构件的上下边缘为单向应力状态，上、下边缘的正应力：

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{E\varepsilon}_1 = \frac{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{A}}+\frac{\boldsymbol{M}_z}{\boldsymbol{W}_z} = \frac{\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{A}}+\frac{\boldsymbol{Fe}}{\boldsymbol{W}_z}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{E\varepsilon}_2 = \frac{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{A}}-\frac{\boldsymbol{M}_z}{\boldsymbol{W}_z} = \frac{\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{A}}-\frac{\boldsymbol{Fe}}{\boldsymbol{W}_z}$$

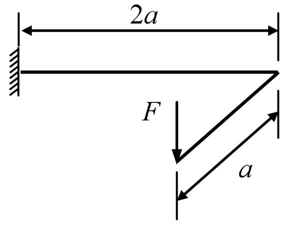
即

$$200\times10^3\times0.001 = \frac{\boldsymbol{F}\times10^3}{5\times25}+\frac{6\boldsymbol{Fe}\times10^3}{5\times25^2}$$

$$200\times10^3\times0.0004 = \frac{\boldsymbol{F}\times10^3}{5\times25}-\frac{6\boldsymbol{Fe}\times10^3}{5\times25^2}$$

解得：F=17.5kN，e=1.786mm。

12、直径为 20mm 的圆截面折杆受力情况如图所示，已知：F＝0.2kN，材料的许用应力为 $[\sigma]=170\mathrm{MPa}$ 。试用第三强度理论确定折杆的长度 a 的许用值。



解答：

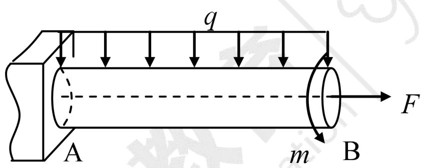
在危险截面 A 上危险点在七上下边缘 $|M| = 2Fa, |T| = Fa$

由第三强度理论 $\sigma_{r3} = \dfrac{1}{W}\sqrt{M^2 + T^2} = \dfrac{\sqrt{(2\times0.2\times a)^2 + (0.2\times a)^2}}{\dfrac{\pi\times0.02^3}{32}} \le [\sigma] = 170\times10^6$

$\therefore a \le 0.29855m$

取 $[a] = 299mm$

13、一端固定的圆杆，直径为 d，长度为 l，载荷如图，指出危险截面、危险点的位置，写出危险点的应力式，按第三强度理论的相当应力式。

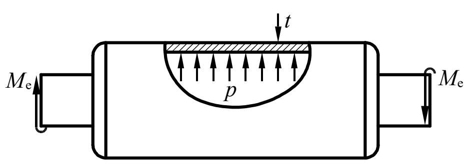


解：危险截面在 A 截面，危险点在其最上边缘，在危险点上有

$$\sigma = \frac{4F}{\pi d^2} + \frac{\dfrac{ql^2}{2}}{\dfrac{\pi d^3}{32}};\tau = \frac{m}{\dfrac{\pi d^3}{16}}$$

按第三强度理论 $\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\dfrac{4F}{\pi d^2} + \dfrac{\dfrac{ql^2}{2}}{\dfrac{\pi d^3}{32}}\right)^2 + 4\left(\dfrac{m}{\dfrac{\pi d^3}{16}}\right)^2}$

14、图示封闭薄壁圆筒，内径 $d = 100$ mm，壁厚 $t = 2$ mm，承受内压 $p = 4$ MPa，外力偶矩 $M_e = 0.192$ kN·m。求靠圆筒内壁任一点处的主应力。



解：$\tau_x = \dfrac{0.192\times10^3}{\dfrac{\pi(0.104^4 - 0.1^4)}{32}}\times0.05 = 5.75$ MPa

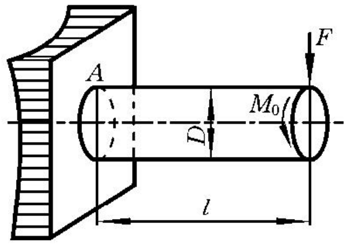
$$\sigma_x = \frac{pd}{4t} = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \frac{pd}{2t} = 100 \text{ MPa}$$

$$\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}{}^2}=\begin{matrix}100.7\\ 49.35\end{matrix}\ \text{MPa}$$

$\sigma_1=100.7$ MPa，$\sigma_2=49.35$ MPa，$\sigma_3=-4$ MPa

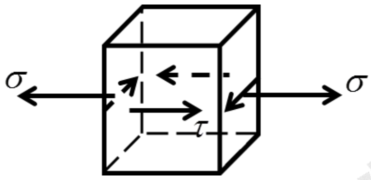
15、圆截面直杆受力如图所示。试用单元体表示 A 点的应力状态。已知 F=39.3N，M_0=125.6Nm，D=20mm，杆长 l=1m。



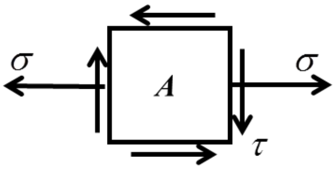
解：按杆横截面和纵截面方向截取单元体

$$\sigma=\frac{M}{W}=\frac{32Fl}{\pi D^3}=\frac{32\times39.3\times1}{\pi\times0.02^3}=50.04MPa$$

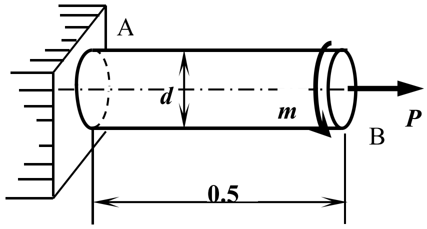
$$\tau=\frac{T}{W_p}=\frac{16M_0}{\pi D^3}=\frac{16\times125.6}{\pi\times0.02^3}=79.96MPa$$



单元体可画成平面单元体如图(从上往下观察)



16、钢制圆轴受力如图，已知该轴直径 d=10mm，许用应力[σ]=160MPa，外力 P=2kN，m=10N.m，试用第三强度理论校核该轴强度。



解：（1）内力分析

轴力方程：

$N(x)=P=2kN\quad(0\le x\le0.5)$

扭矩方程：

$T(x)=m=10N.m\quad(0\le x\le0.5)$

（2）从内力方程可知：危险点为构件的外边缘

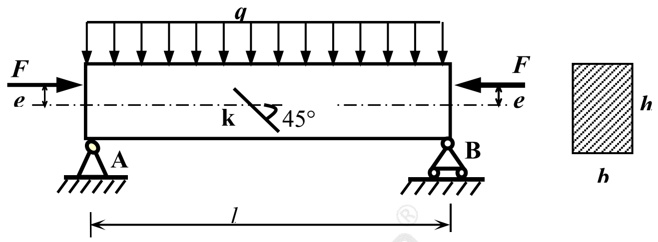
$$\sigma=\frac{N}{A}=\frac{4\times P}{\pi\times d^2}=\frac{4\times2\times10^3}{\pi\times10^2}=25.5MPa$$

$$\tau=\frac{T}{W_P}=\frac{m\times16}{\pi\times d^3}=\frac{10\times10^3\times16}{\pi\times10^3}=50.9MPa$$

$$\sigma_{r3}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}=\sqrt{25.5^2+4\times50.9^2}=105MPa<[\sigma]$$

故构件满足第三强度条件。

17、矩形截面梁受力如图。已知梁上的均布荷载 q=20kN/m，偏心压力 F=1500kN，偏心距 e=80mm，跨度 l=2m，截面尺寸 b=240mm，h=500mm，弹性模量 E=20GPa，泊松比ν=0.3。求（1）跨中截面 k 点沿 45°方向的线应变；（2）跨中截面下边缘点沿轴向的线应变ε。



解：（1）跨中截面内力：

轴力：$N=-1500kN$

剪力：V=0

弯矩：$\mathrm{M}=Pe+\frac{1}{8}ql^2=1500\times80\times10^{-3}+\frac{1}{8}\times20\times2^2=130\mathrm{kN}.m$

所以 k 点为单向受力状态，且 $\sigma_x=\frac{N}{A}=\frac{-1500\times10^3}{240\times500}=-12.5MPa$

$$\sigma_{45^\circ}=\frac{\sigma_x}{2}+\frac{\sigma_x}{2}\cos90^\circ=-6.25MPa$$

$$\sigma_{-45^\circ}=\frac{\sigma_x}{2}+\frac{\sigma_x}{2}\cos(-90^\circ)=-6.25MPa$$

$$\varepsilon_{-45^\circ}=\frac{1}{\mathrm{E}}\left(\sigma_{-45^\circ}-\upsilon\sigma_{45^\circ}\right)=\frac{(1-0.3)\times(-6.25)}{20\times10^3}=-2.19\times10^{-4}$$

（2）跨中截面下边缘处于单向应力状态

$$\sigma_x=\frac{N}{A}+\frac{M}{W_z}=\frac{-1500\times10^3}{240\times500}+\frac{130\times10^6\times6}{240\times500^2}=0.5MPa$$

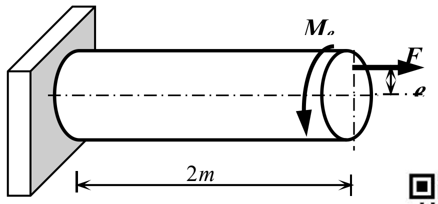
$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{\mathrm{E}}=\frac{0.5}{20\times10^3}=-0.25\times10^{-4}$$

18、如图实心圆截面杆，受偏向拉力 F 及扭转力偶矩 M_e 共同作用，已知杆直径 d=80mm，F=100kN，M_e=5kN.m，偏心距 e=20mm，材料的弹性模量 E=200GPa，泊松比ν=0.3。求：

（1）画出危险点的应力状态，并求该点的主应力大小；

（2）若材料的许用应力[σ]=160MPa，试按第三强度理论校核杆的强度。

解：（1）杆件内力

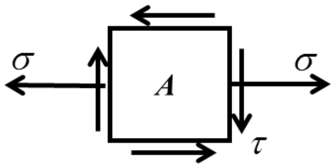


$$N=F=100\mathrm{kN}$$

$$\mathrm{M}=Fe=2\mathrm{kN.m}$$

$T = M_e = 5\text{kN.m}$

杆件中的危险点在杆件的上边缘线上，其单元体如图



$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W_z} = \frac{100\times10^3\times4}{\pi\times80^2} + \frac{2\times10^6\times32}{\pi\times80^3} = 60MPa$$

$$\tau = \frac{T}{W_t} = \frac{5\times10^6\times16}{\pi\times80^3} = 50MPa$$

$$\sigma_{ps} = \begin{cases} \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x{}^2} \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{60}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{60}{2}\right)^2 + 50^2} \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 88 \\ -28 \\ 0 \end{cases}$$

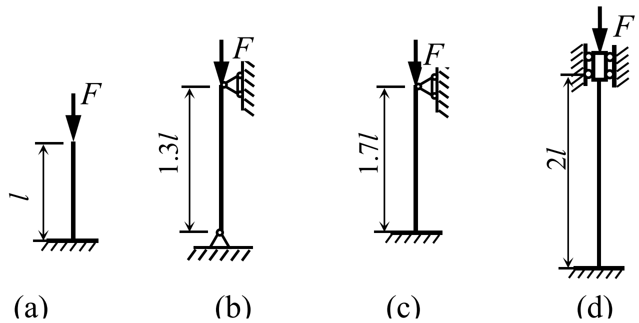
$\sigma_1 = 88\text{MPa}$ $\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 = -28\text{MPa}$

（2） $\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{60^2 + 4\times50^2} = 116MPa < [\sigma]$

强度满足。

第十二章　压杆稳定

1、 图中所示为约束情况不同的圆截面细长杆，各杆直径和材料相同，问哪个杆的临界力最大？



解：由欧拉公式，其它条件相同的情况下，相当长度最小的压杆临界力最大。

（a） $\mu l = 2l$

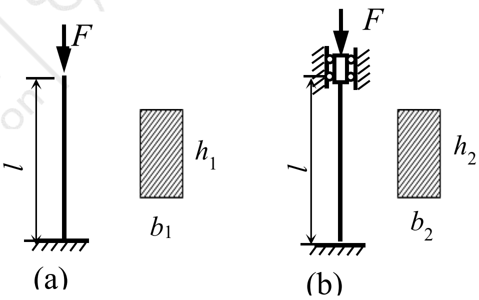
（b） $\mu l = 1.3l$

（c） $\mu l = 0.7 \times 1.7l = 1.19l$

（d） $\mu l = 0.5 \times 2l = l$

所以图（d）中杆的临界力最大。

2 图中为约束不同的两个矩形截面细长杆，长度和材料相同，且有 $h_1=2b_1$，$h_2=2b_2$。为使两个压杆的临界力相等，b_2/b_1 应为多少？



解：两个杆件的临界力分别为：

$$F_{cr1} = \frac{\pi^2 EI_1}{(\mu_1 l)^2} = \frac{\pi^2 E h_1 b_1^3}{(2l)^2 \times 12} = \frac{\pi^2 E b_1^4}{24 l^2}$$

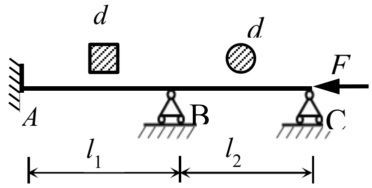
$$F_{cr2} = \frac{\pi^2 EI_2}{(\mu_2 l)^2} = \frac{\pi^2 E h_2 b_2^3}{(0.5l)^2 \times 12} = \frac{\pi^2 E b_2^4}{1.5 l^2}$$

由两杆临界力相等，即　$F_{cr1} = F_{cr2}$

可得：

$b_2/b_1=0.5$

3、图示结构中，杆 AB 和杆 BC 均为细长杆，AB 为圆截面杆，直径为 d，BC 为正方形截面杆，截面边长为 d，两杆材料相同，求两杆的长度比 l_1/l_2。



解：两杆的临界力分别为

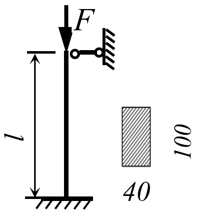
$$F_{cr1} = \frac{\pi^2 EI_1}{(\mu_1 l_1)^2} = \frac{\pi^2 E d^4}{(0.7 l_1)^2 \times 12}$$

$$F_{cr2} = \frac{\pi^2 EI_2}{(\mu_2 l_2)^2} = \frac{\pi^3 E d^4}{l^2 \times 64}$$

两杆同时处于临界状态时　$F_{cr1} = F_{cr2}$

可得：　$l_1/l_2=1.86$

4、 求图示矩形截面压杆的临界力。已知杆长 l=2.5m，截面宽 b=40 mm、高 h=100 mm，材料弹性模量 E=200 GPa，比例极限 σ_P=200MPa，屈服极限 σ_s=240MPa，直线公式 σ_{cr}=304-1.12λMPa。



解：（1）杆的判别柔度

$$\lambda_P = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_P}} = \pi\sqrt{\frac{200\times10^3}{200}} = 99$$

（2）压杆的惯性半径 i

压杆失稳必在刚度较小的平面内产生，故应求最小惯性半径

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{hb^3}{12}\times\frac{1}{bh}} = \frac{b}{2\sqrt{3}} = \frac{40}{2\sqrt{12}} = 11.55\text{mm}$$

（3）求柔度λ

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0.7\times2500}{11.55} = 152 \geq \lambda_P = 99$$

（4）用欧拉公式计算临界力

$$F_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}A = \frac{\pi^2\times200\times10^3}{152^2}\times40\times100 = 344kN$$

5、一根两端铰支钢杆，截面直径 $d = 40mm$，长度 $l = 0.8m$。钢材的 E=210GPa，σ_p=280MPa，

$\lambda s = 43.2$，直线公式 σ_{cr}=461-2.568λ (MPa)，求压杆的临界力。

解：（1）杆的判别柔度

$$\lambda_P = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_P}} = \pi\sqrt{\frac{210\times10^3}{280}} = 86$$

（2）压杆的惯性半径 i

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4}{64}\times\frac{4}{\pi d^2}} = \frac{d}{4} = \frac{40}{4} = 10\text{mm}$$

（3）求柔度λ

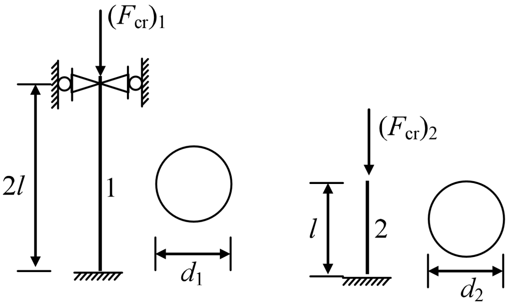
$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1\times800}{10} = 80$$

故 $\lambda_s < \lambda < \lambda_P$ 属中长杆。

（4）用经验公式计算临界力

$$F_{\text{cr}} = (461-2.568\lambda)A = (461-2.568\times80)\times\frac{\pi\times40^2}{4} = 320.98kN$$

6、图中的 1、2 杆材料相同，均为圆截面压杆，若使两杆的临界应力相等。试求两杆的直径之比 d_1/d_2，以及临界力之比 $(F_{cr})_1/(F_{cr})_2$。并指出哪根杆的稳定性好。



解答：由临界应力总图可知，σ_{cr} 相同，则 λ 值相同，$\lambda_1=\lambda_2$

对 1 杆，$$\lambda=\frac{\mu_1 l_1}{i_1}=\frac{\mu_1 l_1}{\sqrt{\frac{I_1}{A_1}}}=\frac{\mu_1 l_1}{\frac{d_1}{4}}=\frac{4\mu_1 l_1}{d_1}$$

对 2 杆，$$\lambda=\frac{\mu_2 l_2}{i_2}=\frac{\mu_2 l_2}{\sqrt{\frac{I_2}{A_2}}}=\frac{\mu_2 l_2}{\frac{d_2}{4}}=\frac{4\mu_2 l_2}{d_2}$$

故：$$\frac{d_1}{d_2}=\frac{\mu_1 l_1}{\mu_2 l_2}=\frac{0.7\times 2l}{2\times l}=0.7 \qquad \frac{F_{cr1}}{F_{cr2}}=\frac{\sigma_{cr1}A_1}{\sigma_{cr2}A_2}=\frac{A_1}{A_2}=\frac{d_1^2}{d_2^2}=0.49$$

$\therefore F_{cr1}<F_{cr2}$，即 2 杆稳定性好些。

7、校核两端固定矩形截面压杆的稳定性。已知 l＝3m，F＝100kN，b＝40mm，h＝60mm。材料的弹性模量 E＝200GPa，$\sigma_p=196\text{MPa}$，稳定安全因数 n_{st}＝3。

解：

$$\because \lambda_p=\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}=100$$

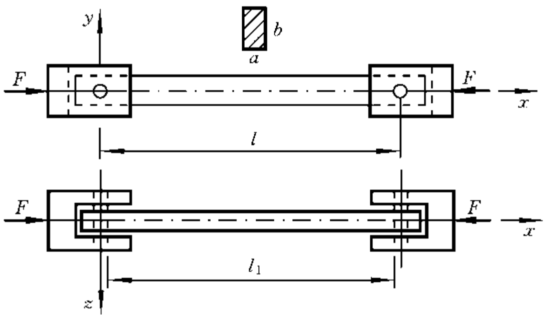
$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{\mu l}{\sqrt{\frac{I}{A}}}=\frac{ul}{\frac{b}{\sqrt{12}}}=130>\lambda_p$$

$$\therefore F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(0.5l)^2}=\frac{\pi^2\times 200\times 10^9\times\frac{0.06\times 0.04^3}{12}}{(0.5\times 3)^2}=281kN$$

$$\because F=100kN>\frac{F_{cr}}{n_{st}}=\frac{281}{3}=93.7kN$$

故压杆不符合稳定条件。

8、由 Q235 钢组成的矩形截面压杆，其两端用铰销支承。已知截面尺寸：a=40mm，b=60mm。设 l=2.1m，$l1$=2m，E=205GPa，σ_p=200MPa，试求此压杆的临界压力。



解：首先确定压杆的柔度。截面对其两个形心主轴的惯性半径不同，且压杆在两个主惯性平面内的支承情况也不同，应分别计算。

$$i_z=\sqrt{\frac{I_z}{A}}=\sqrt{\frac{ab^3/12}{ab}}=\frac{b}{\sqrt{12}}=17.32mm$$

$$i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}=\sqrt{\frac{ba^3/12}{ab}}=\frac{a}{\sqrt{12}}=11.55\ mm$$

xy 平面内为两端铰支：$\lambda_z=\dfrac{\mu l}{i_z}=\dfrac{1\times 2100}{17.32}=121.2$

xz 平面内为两端固定：$\lambda_y=\dfrac{\mu l_1}{i_y}=\dfrac{0.5\times 2000}{11.55}=86.6$

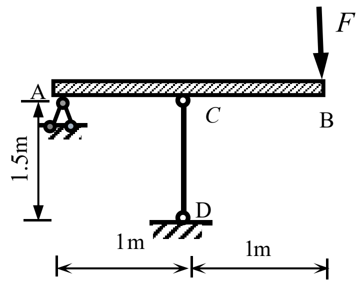
$$\lambda=\lambda_{\max}=\lambda_z=121.2$$

判断临界压力的适用公式：$\lambda_p=\sqrt{\dfrac{\pi^2 E}{\sigma_p}}=\sqrt{\dfrac{\pi^2\times 205\times 10^9}{200\times 10^6}}=100.6<\lambda$

此压杆为细长杆，有：$\sigma_{cr}=\dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}=\dfrac{\pi^2\times 205\times 10^9}{121.2^2}Pa=137.7MPa$

$$F_{cr}=\sigma_{cr}\times A=330.5kN$$

9、 图示结构中 AB 为刚性杆件，圆杆 CD 的直径 d=50mm，E=200GPa，λ_P=100，λ_S=60，直线经验公式：$\sigma_{cr}=304-1.12\lambda$ 稳定安全系数 n_{st}=3。试确定结构的许可荷载[F]。



解： 由 $\sum M_B=0$ 可得

$$N_{CD}=2F\quad（压力）$$

AB 杆为压杆，应保证其不失稳，所以做稳定计算

柔度：$\lambda=\dfrac{ul_{CD}}{i}=\dfrac{4ul}{d}=\dfrac{4\times1\times1.5\times1000}{50}=120>\lambda_P$

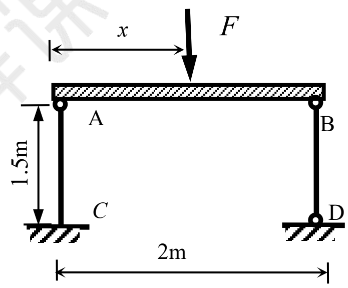
所以，杆 CD 为大柔度杆

$$N_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}\cdot A=\frac{\pi^3\times 200\times 10^3\times 50^2}{4\times 120^2}=268.7\text{kN}$$

$$[N_{\text{CD}}]=\frac{N_{cr}}{n_{st}}=\frac{268.7}{3}=2[F]$$

$[F]=44.79\text{kN}$　　　　所以，结构的许可荷载 $[F]=44.77\text{kN}$

10、 图示结构中 AB 为刚体，杆 AC 为圆截面杆，直径 d=50mm，杆 BD 为正方形截面杆，截面边长 a=40mm，两杆材料相同，E=200GPa，σ_P=200MPa，σ_S=240MPa，直线经验公式：$\sigma_{cr}=304-1.12\lambda$（MPa）。若 F 作用下两杆同时失稳，求 x 的大小。



解：（1）求两杆的压力

$$\text{N}_{\text{AC}}=\frac{2-x}{2}F\quad（压力）\qquad \text{N}_{\text{BD}}=\frac{x}{2}F\quad（压力）$$

（2）求判别柔度

$$\lambda_P=\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_P}}=\pi\sqrt{\frac{200\times 10^3}{200}}=99$$

$$\lambda_s=\frac{a-\sigma_s}{b}=\frac{304-240}{1.12}=57$$

（3）求两杆柔度

$$\lambda_{AC}=\frac{\mu_{AC}l}{i_{AC}}=\frac{0.7\times 1500}{50/4}=84$$ 故 $\lambda_s<\lambda_{\text{AC}}<\lambda_P$ 属中长杆。

$$\lambda_{\text{BD}}=\frac{\mu_{\text{BD}}l}{i_{\text{BD}}}=\frac{1\times 1500}{40/2\sqrt{3}}=130$$ 故 $\lambda_{\text{BD}}>\lambda_P$ 属细长杆。

（4）计算临界力

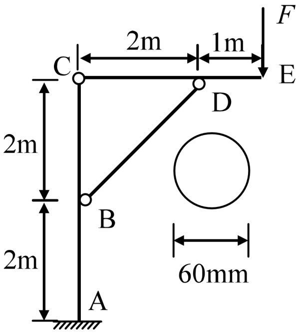
$$(N_{\text{cr}})_{AC}=(304-1.12\lambda_{AC})A_{AC}=(304-1.12\times 84)\times\frac{\pi\times 50^2}{4}=412kN$$

$$(N_{cr})_{BD}=\frac{\pi^2 E}{\lambda_{BD}^{\ 2}}\cdot A_{BD}=\frac{\pi^2\times 200\times 10^3\times 40^2}{130^2}=187\text{kN}$$

（5）两杆同时失稳时

$$\frac{N_{AC}}{N_{BD}}=\frac{2-x}{x}=\frac{(N_{cr})_{AC}}{(N_{cr})_{BD}}=\frac{412}{187}$$ 解得 $x=0.625m$

11、试确定图示结构中压杆 BD 失稳时的临界载荷 F 值。已知：$E=2\times10^5$MPa，$\sigma_p=200$MPa。



解：（1）研究 CE 杆的平衡，BD 杆受压，当 BD 杆失稳时，其轴力为 $N_{cr,BD}$

$$\sum M_c=0 \qquad N_{cr,\ BD}\sin45^\circ\times2=F_{cr}\times3$$

$$\therefore N_{cr,BD}=\frac{\sqrt{2}}{3}F_{crBD}$$

（2）分析 BD 杆，

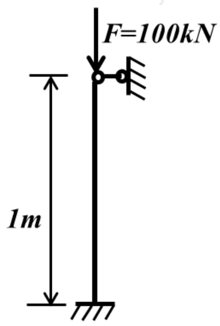
$$\lambda_{BD}=\frac{\mu l}{i}=\frac{1\times2\sqrt{2}}{\frac{0.06}{4}}=188.6>\lambda_p=\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}=\pi\sqrt{\frac{2\times10^5}{200}}=99.3$$

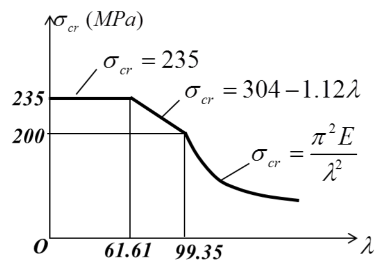
$$\therefore F_{crBD}=\sigma_{crBD}A=\frac{\pi^2EI}{\lambda_{BD}^2}A=\frac{\pi^2\times2\times10^5\times\pi\times60^2}{188.6^2\times4}=157kN$$

联立（1）（2）得：

$$F_{cr}=\frac{\sqrt{2}}{3}\times157=74kN$$

12、图示杆件由 Q235 钢制成，该材料的弹性极限σ_p=200MPa，屈服极限σ_s= 235MPa ，弹性模量 E=200GPa，中长杆经验公式σ_{cr}=304 -1.12λMPa， λ为压杆的柔度。（1）试画临界应力总图并在图中标出特征点。（2）图中杆为 d=35mm 的实心圆杆，稳定安全系数 n_{st}=2，试校核该杆的稳定性。





解：(1) $\lambda_p=\sqrt{\frac{\pi^2E}{\sigma_p}}=\sqrt{\frac{\pi^2\times200\times10^9}{200\times10^6}}=99.35$

$$\lambda_s=\frac{304-\sigma_s}{1.12}=\frac{304-235}{1.12}=61.61$$

(2)　计算压杆的柔度

$$m = 0.7 \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{d}{4} \quad 1 = \frac{ml}{i} = \frac{0.7' \ 1}{0.035/4} = 80$$

$1_s < 1 < 1_p$　该压杆为中长杆

$$s_{cr} = 304 - 1.121 = 304 - 80' \ 1.12 = 214.4(MPa)$$

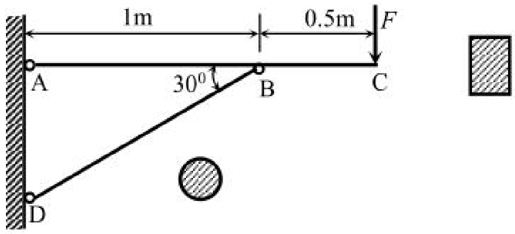
压杆应力为

$$s = \frac{F}{A} = \frac{4F}{pd^2} = \frac{4创100 \quad 10^3}{p' \ 0.035^2} Pa = 103.9MPa$$

$$s = 103.9\text{MPa} < \frac{s_{cr}}{n_{st}} = \frac{214.4}{2} = 107.2MPa$$

该压杆稳定性满足

13、图示托架，其斜杆 BD 为直径 d=60mm 的圆截面杆，水平杆 AC 为 100mm×150mm 的矩形截面杆，已知两杆材料的弹性模 E=200GPa，材料的许用应力[σ]=170MPa，材料柔度的界限值λp =100，稳定安全系数 n_{st} =2.5，非细长压杆的临界应力公式为σ_{cr} =240-0.00682λ^2 (MPa)，荷载 F=50kN，试校核此结构的安全性。



解：（1）内力分析

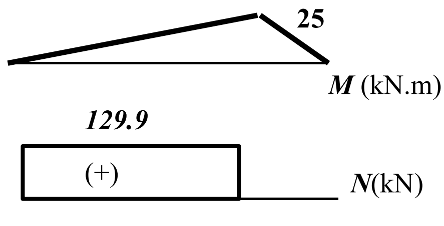
由 $\sum M_A = 0$

$$N_{BD} \sin 30^\circ \times 1 = F \times 1.5$$

$$\therefore N_{BD} = 3F = 150\text{kN}$$

AC 杆中的最大弯矩

作 BD 杆的内力图如右



危险截面为 B

$$N_{\max} = 129.9kN$$

$$M_{\max} = 25kN.m$$

（2）校核 AC 杆（拉弯组合）

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A_{AC}} + \frac{M_{\max}}{W_{z,AC}} = \frac{129.9\times10^3}{100\times150} + \frac{25\times10^6\times6}{100\times150^2} = 75.3\text{MPa} < [\sigma]$$

（3）校核 BD 杆的稳定性

柔度：$\lambda_{BD}=\dfrac{\mu l_{BD}}{i_{BD}}=\dfrac{1\times10^3/\cos30^\circ}{60/4}=76.98kN<\lambda_P$

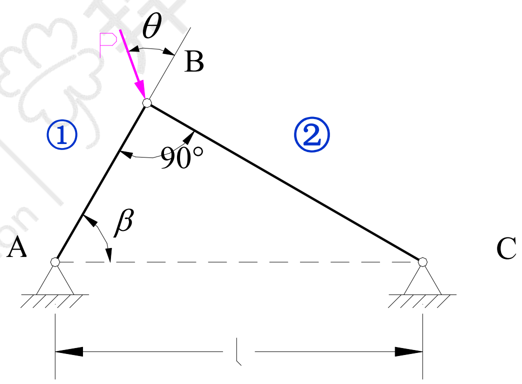
故需用经验公式计算其临界力。

$$N_{cr,BD}=\sigma_{cr}A_{BD}=\left(240-0.00682\lambda_{BD}^2\right)A_{BD}$$
$$=\left(240-0.00682\times76.98^2\right)\pi\times60^2/4=564.31kN$$

$N_{BD}=150kN<\dfrac{N_{cr,BD}}{n_{st}}=\dfrac{564.31}{3}=188kN$ 故压杆稳定性满足。

综上：结构的安全性满足。

14、图示结构，①、②两细长压杆截面和材料相同。若由于构件在 ABC 平面内失稳而引起破坏，试确定使载荷 P 为最大时的θ角（设 0<θ<π/2）。



解：由 B 节点的平衡条件可得：

$$N_1=P\cos\theta$$

$$N_2=P\sin\theta$$

两杆为细长杆，临界力分别为：

$$P_{cr1}=\frac{\pi^2EI}{l_1^2},$$
$$P_{cr2}=\frac{\pi^2EI}{l_2^2}$$

要使 P 最大，①、②杆应同时达到临界状态，即

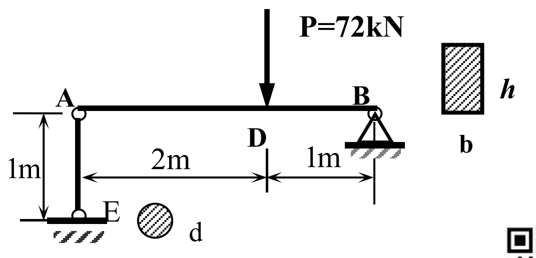
$$P\cos\theta=\frac{\pi^2EI}{l_1^2};\quad P\sin\theta=\frac{\pi^2EI}{l_2^2}$$

将两式相除可得：$tg\theta=\dfrac{l_1^2}{l_2^2}=ctg^2\theta$

由此得 $\theta=arctg(ctg^2\theta)$

15、矩形形截面梁 ADB，已知 b=100mm，h=150mm，材料许用应力[σ]=150MPa。柱 AE 横截面为圆形，直径 d=30mm，材料的弹性模量 E=200GPa，判别柔度λ_p=100，直线经验公式为：$\sigma_{cr}=a-b\lambda$；稳定安全系数 n_{st}=2，两端铰支。

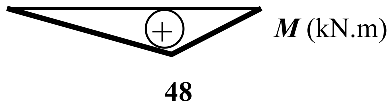
试校核结构是否安全。



解：（1）研究 AB 梁

$R_A = 24\ kN \qquad R_B = 48kN$

作 AB 梁的弯矩图如右。



由弯矩图可知，危险截面为 D

$$M_D = M_{\max}^{+} = 48KN \cdot m$$

D 截面校核

$$(\sigma_{\max})_{\mathrm{D}} = \frac{M_D \cdot}{\mathrm{W}_Z} = \frac{48\times10^6\times6}{100\times150^2} = 128MPa < [\sigma_c]$$

故 AB 梁的强度条件满足。

（2）对 AD 柱： $N_{AD} = 24\mathrm{kN}(\text{压})$，需进行稳定性计算。

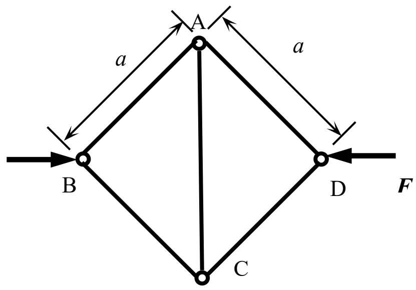
柔度：$\lambda = \dfrac{\mu l}{i} = \dfrac{1000}{30/4} = 133.3 > \lambda_P$ 故可用欧拉公式计算其临界力。

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2\times200\times10^3\times\frac{1}{64}\times\pi\times30^4\times10^{-3}}{1000^2} = 78.36\mathrm{k}N$$

$$N_{AD} = 24kN < [N_{AD}] = \frac{P_{cr}}{n_{st}} = \frac{78.36}{2} = 39.18\mathrm{k}N$$ 故压杆稳定性满足。

综上，结构安全。

16、图示正方形桁架结构由 5 根钢杆组成，长度 a=1.5m。各杆的直径均为 d=40mm，材料均为 Q235 钢，弹性模量 E=206GPa，[σ]=160MPa，材料的判别柔度λ_P=100，λ_s=60，稳定安全系数 n_{st}=2，非细长杆临界应力公式$\sigma_{cr} = 240 - 0.00682\lambda^2$（MPa）。当 F=60kN 时，校核结构的安全性。



解：（1）求各杆轴力：

N_{AC}=F=60kN（拉力）

$N_{AB}=N_{BC}=N_{CD}=N_{DA}=\dfrac{\sqrt{2}F}{2}$=42.4（压力）

（2）校核拉杆强度

$$\sigma_{AC} = \frac{N_{AC}}{A} = \frac{60\times10^3\times4}{\pi\times40^2} = 47.8\mathrm{MPa} < [\sigma] = 160$$

故 EB 杆强度满足。

（3）校核压杆的稳定性

柔度：$\lambda = \dfrac{\mu l}{i} = \dfrac{1500}{40/4} = 150 > \lambda_P$ 故可用欧拉公式计算其临界力。

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}=\frac{\pi^2\times 200\times 10^3\times\dfrac{\pi}{64}\times 40^4\times 10^{-3}}{1500^2}=113.4kN$$

$$N_{\mathrm{AC}}=42.4\mathrm{kN}<\left[N_{CD}\right]=\frac{P_{cr}}{n_{st}}=56.7\mathrm{kN}$$

故压杆稳定性安全

综上：结构安全