解析几何练习题答案

第一章 向量与坐标

一、填空

1. 4 2.2 3. $B(7,-2,-1)$ 4. $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right\}$ 5. $\sqrt{5}$

6. $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$

二、选择

1.D 2. C 3. B 4. B 5.C 6.D 7.C 8.B

三、

1.× 2.× 3. √ 4.× 5.× 6. √

四、计算

1．解：因为$|a|=1$，$|b|=4$，$|c|=5$，并且$a+b+c=0$

所以a与b同向，且$a+b$与c反向

因此$a\times b=0$， $b\times c=0$， $c\times a=0$

所以$a\times b+b\times c+c\times a=0$

2. 解: $|a|=2$，$|b|=7$，$|c|=5$，且$a+b+c=0$

则a与c同向，a、c均与b反向.

所以$a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a$

$=2\times7\cos180^0+7\times5\cos180^0+5\times2\cos0^0$

$=-14-35+10$

$=-39$

3.解：$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|\cos\theta=3$ （1）

$|a\times b|=|a|\cdot|b|\sin\theta=4$ （2）

$(1)^2+(2)^2$得$(|a|\cdot|b|)^2=25$

所以 $|a|\cdot|b|=5$

4．解：设x的坐标为(x,y,z)，又$a=(1,5,-2)$

则$a\cdot x=x+5y-2z=3$ （1）

又x与a共线，则$x\times a=0$

即

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ 5 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 5 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (-2y-5z)\vec{i} + (z+2x)\vec{j} + (5x-y)\vec{k}$$

$$= 0$$

所以$\sqrt{(-2y-5z)^2+(z+2x)^2+(5x-y)^2}=0$

即$29x^2+5y^2+26z^2+20yz+4xz-10xy=0$ （2）

又x与a共线，x与a夹角为0或π

$$\cos 0 = 1 = \frac{x\cdot a}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{1^2+5^2+(-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{30}}$$

整理得 $x^2+y^2+z^2=\frac{3}{10}$ （3）

联立(1)、(2)、(3)解出向量x的坐标为$\left(\frac{1}{10},\frac{1}{2},-\frac{1}{5}\right)$

5、解：$\overrightarrow{AB}=\{2,-1,-2\}$，$\overrightarrow{AC}=\{1,-2,2\}$，$\overrightarrow{BC}=\{-1,-1,4\}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2+2-4=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，所以$\Delta ABC$为直角三角形，

$$\cos\angle B=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{9}{3\times3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\angle B=\frac{\pi}{4}$$

6.解：$|a|=|b|=|c|=r$且它们两两所成的角相等，设为θ

则有$a\cdot b=1\times0+1\times1+0\times1=1$

则$\cos\theta=\frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}=\frac{1}{r^2}$

设向量c的坐标为(x,y,z)

则$a\cdot c=1\cdot x+1\cdot y+0\cdot z=x+y=|a|\cdot|b|\cos\theta=r\cdot r\cdot\frac{1}{r^2}=1$ （1）

$b\cdot c=0\cdot x+1\cdot y+1\cdot z=y+z=|b|\cdot|c|\cos\theta=r\cdot r\cdot\frac{1}{r^2}=1$ （2）

$$|c|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$$

所以 $x^2+y^2+z^2=2$ （3）

联立（1）、（2）、(3)求出 $\begin{cases}x=1\\y=0\\z=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{3}\\y=\dfrac{4}{3}\\z=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$

所以向量 c 的坐标为 $(1,0,1)$ 或 $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$

7.解：因为 $A(3,0,1)$， $B(2,-4,1),C(0,-2,3),D(-2,0,-3)$

所以 $\vec{AB}=(-1,-10,0)$

$\vec{AC}=(-3,-8,2)$

$\vec{AD}=(-5,-6,-4)$

（1）$\left(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}\right)$ 是以它们为邻边的平行六面体的体积

$$V=\begin{vmatrix}-1 & -10 & 0\\-3 & -8 & 2\\-5 & -6 & -4\end{vmatrix}=-32+100+0-(0-120+12)=176$$

（2）由立体几何中知道，四面体 $ABCD$ （三棱锥 $A-BCD$ ）的体积

$$V_T=\frac{1}{6}V=\frac{1}{6}\times176=\frac{88}{3}$$

（3）因为 $\vec{BC}=(-2,2,2)$， $\vec{BD}=(-4,4,-4)$

$$\vec{BC}\times\vec{BD}=\begin{vmatrix}i & j & k\\-2 & 2 & 2\\-4 & 4 & -4\end{vmatrix}=-16i-16j+0k$$

所以 $\left|\vec{BC}\times\vec{BD}\right|=\sqrt{(-16)^2+(-16)^2}=16\sqrt{2}$，这是平行四边形 $BCED$ 的面积

因此 $S_{\Delta BCD}=\dfrac{1}{2}S_{\square BCED}=\dfrac{1}{2}\times16\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

(4)设点 A 到平面 BCD 的距离为 H，由立体几何使得三棱锥 $A-BCD$ 的体积

$$V_T = \frac{1}{3} S_{\Delta BCD} \cdot H$$

所以 $H = \frac{3V_T}{S_{\Delta BCD}} = \frac{3 \cdot \frac{88}{3}}{8\sqrt{2}} = \frac{11}{\sqrt{2}} = \frac{11\sqrt{2}}{2}$

第二章 轨迹与方程

一、填空

1. $x^2+y^2+z^2=1$　球面　$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$　xoy 平面上的圆

2. 点 $(1,2,3)$　z 轴

3. $\begin{cases} x=\dfrac{a-t^2}{b} \\ y=\dfrac{at-t^3}{b} \end{cases},(-\infty<t<+\infty)$

4. $x^2+(y-2)^2+z^2=4$

二、计算

1. （1）$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=4z$

（2）$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

（3）$x^2+y^2+z^2=1,(z\geq 0)$

2. （1）$\begin{cases} y^2-4x=0, \\ y+z=0; \end{cases}$　（2）$\begin{cases} x+y=a, \\ x-y=z; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x^2+y^2+2x=0 \\ z^2+2x=0 \end{cases}$

3. （1）$\begin{cases} x=-t^4 \\ y=2t \\ z=t^2 \end{cases}$　（2）$\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=\sin\theta, \quad (0\leq\theta<2\pi) \\ z=\pm\cos\theta \end{cases}$

第三章 平面与空间直线

一、填空

1. 相交　2. $\sqrt{2}$　3. -2　4. $\sqrt{18}$　5. $3x-5y+4z-7=0$　6. $\frac{4}{3}$

7. $\begin{cases} x=3+\frac{1}{2}t \\ y=4+\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ z=-5-\frac{1}{2}t \end{cases}$　8. $x+2y-3z=0$　9. $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-3}$

二、选择

1. A　2. A　3. C　4. D　5. A　6. A　7. B

三、判断

1. √　2. ×　3. √　4. ×　5. √

四、 计算

1．解：因为 $A(3,8,7), B(-1,2,-3)$

AB 中垂面上的点到 A、B 的距离相等，设动点坐标为 $M(x,y,z)$，则由 $|MA|=|MB|$ 得

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-8)^2+(z-7)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2}$$

化简得 $2x+3y+5z-27=0$

这就是线段 AB 的中垂面的方程。

2. 解：设所求直线与 y 轴交点为 $(0,a,0)$，则其方向向量为 $\{2,-3-a,4\}$，此向量应与 y 轴垂直，所以 $a=-3$，所求直线方程为

$$\begin{cases} \frac{x-2}{2}=\frac{z-4}{4} \\ y=-3 \end{cases}$$

3.解：L_1 的方向向量为 $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\{1,-2,-3\}$，$L_2$ 得方向向量为 $\{-1,2,3\}$，且点 $(1,-1,2)$ 在 L_2 上但不在 L_1 上。所以 $L_1 // L_2$。

由直线 L_1，令 $z=-1$，得 B 点 $(1,-1,-1)$，则垂直于平面的向量 $\vec{AB}=\{0,0,-3\}$，可得平面法向量为

$$\vec{n}=\vec{v_1}\times\vec{n}=\{-6,-3,0\}=-3\{-2,-1,0\}$$

所求平面方程为 $2(x-1)+(y+1)=0$

即 $2x+y-1=0$。

4. 解：平面与直线 $\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ x+2y-z+1=0 \end{cases}$ 平行，直线的方向向量为

$$\vec{v_1}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=\{-1,2,3\}$$

平面与直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=-z$ 平行，直线的方向向量为 $\vec{v_2}=\{2,-1,-1\}$

平面的法向量为

$$\vec{n}=\vec{v_1}\times\vec{v_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=\{1,5,-3\}$$

且平面过点 $(-1,2,1)$，则平面方程为

$$1\times(x+1)+5\times(y-2)+(-3)\times(z-1)=0$$

$$x+5y-3z-6=0$$

5.解：由题意知，两直线的方向矢与平面的法向量垂直，即

$$\vec{n}=\vec{v_1}\times\vec{v_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\{2,0,-1\}$$

平面过直线，即过直线上面的点 $A(1,-2,-3)$，则可得平面的方程为

$$2\times(x-1)+0\times(y+2)-1\times(z+3)=0$$

$$2x-z-5=0$$

6.解：直线 $\begin{cases} x-2y+z-1=0 \\ \lambda x+2y+3z+1=0 \end{cases}$ 与 x 轴相交，则交点坐标为 $(x,0,0)$，代入直线方程为

$$x-1=0 \qquad (1)$$
$$\lambda x+1=0 \qquad (2)$$

（1）+（2）得 $(1+\lambda)x=0$，而原点 $O(0,0,0)$ 不在直线上，故 $x\neq 0$，所以

$1+\lambda=0, \lambda=-1$

7.解：线段平行于平面，则平面的方向向量 $\overrightarrow{MN}=\{-3,2,z+5\}$ 与平面的法向量 $\vec{n}=\{7,4,1\}$ 垂直. 则有

$$-3\times 7+2\times 4+(z+5)\times 1=0$$

即

$$z=8$$

8.解： 直线 L 在平面 π 上，即直线 L 的方向向量与平面 π 的法向量 $\vec{n}=\{1,-1,1\}$ 垂直，

又与直线 L_1 垂直，即直线 L 的方向向量与直线 L_1 的方向向量 $\vec{v_1}=\{1,1,1\}$ 垂直，

则 $\vec{v}=\vec{n}\times\vec{v_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\{2,0,-2\}$

直线 L 在平面 $\boldsymbol{\pi: x+y+z-1=0}$ 上，取 π 上一点，令 $y=z=1$，则 $x=-1$

得点 $(-1,1,1)$，则直线的方程为

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{-2}$$

9.解：由题意知，两直线的方向向量与平面的法向量垂直，即

$$\vec{n}=\vec{v_1}\times\vec{v_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=\{1,-3,1\}$$

平面过直线 L_1，即过直线 L_1 上面的点 $A(1,2,3)$，则可得平面的方程为

$$1\times(x-1)-3\times(y-2)+1\times(z-3)=0$$

$$x-3y+z+2=0$$

10．解：与 xoy 平面垂直的平面平行于 y 轴，方程为

$$Ax+Cz+D=0 \qquad (1)$$

把点 $A(3,2,1)$ 和点 $B(-1,2,-3)$ 代入上式得

$$3A+C+D=0 \qquad (2)$$

$$-A-3C+D=0 \qquad (3)$$

由（2），（3）得 $A=-\frac{D}{2},C=\frac{D}{2}$

代入（1）得 $-\frac{D}{2}x+\frac{D}{2}z+D=0$

消去 D 得所求的平面方程为

$$x-2-z=0$$

11.解；设动点为 $M(x,y,z)$，由点到平面的距离公式得

$$\frac{|3z-y+2z-6|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{|-5x+2y-10z+10|}{\sqrt{(-5)^2+2^2+(-10)^2}}$$

所以 $3x-y+2z-6=\pm\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{129}}(-5x+2y-10z+10)$

12.解：设截距的比例系数为 k，则该平面的截距式方程为

$$\frac{x}{-2k}+\frac{y}{6k}+\frac{z}{5k}=1$$

化成一般式为 $-15x+5y+6z-30k=0$

又因点 $O(0,0,0)$ 到平面 α 的距离为 120，则有

$$\frac{|-30k|}{\sqrt{(-15)^2+5^2+6^2}}=120$$

求出 $k=\pm4\sqrt{286}$

所以，所求平面方程为 $-15x+5y+6z\pm120\sqrt{286}=0$

13.解：两平面的法向量分别为 $\vec{n_1}=(m,-1,-6)$，$\vec{n_2}=(2,-3m,11)$，由 $\vec{n_1}\perp\vec{n_2}$，得

$$2m-21m-66=0$$

求出 $m=-\frac{66}{19}$

14.解：A 在 z 轴上，故设 A 的坐标为（0 0 z），由点到平面的距离公式，得

$$\frac{|-7z+14|}{\sqrt{4^2+(-2)^2+(-7)^2}}=7$$

所以 $-7z+14=\pm\sqrt{69}$

则 $z=2\pm\sqrt{69}$

那么 A 点的坐标为 $A(0,0,2\pm\sqrt{69})$

15.解：两已知直线的方向向量分别为$\vec{v_1}=(1,1,0),\vec{v_2}=(1,-1,0)$，平面与直线平行，则

平面的法向量$\vec{n}=(A,\ B,\ C)$与直线垂直

由$\vec{n}\perp\vec{v_1}$，有$A+B+0=0$ （1）

由$\vec{n}\perp\vec{v_2}$，有$A-B-0=0$ （2）

联立（1），（2）求得$A=0,B=0$,只有$C\neq 0$

又因为平面经过点$P(1,-2,0)$，代入平面一般方程得

$$0\times 1+0\times(-2)+\mathrm{C}\times 0+D=0$$

所以$D=0$

故所求平面方程$Cz=0$，即$z=0$，也就是xoy平面。

16.解：设所求直线的方向向量为$\vec{v}=(m,\ n,\ p)$，

直线与平面$3x+2z-1=0$平行，则$\vec{v}\perp\vec{n}$，有

$$3m-n+2p=0 \qquad (1)$$

直线与直线$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z}{1}$相交，即共面

则有$\begin{vmatrix} m & n & p \\ 4 & -2 & 1 \\ 1-1 & 3-0 & 0+2 \end{vmatrix}=0$

所以 $$-7m-8n+12=0 \qquad (2)$$

由（1），（2）得

$$\frac{m}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -8 & 12 \end{vmatrix}}=\frac{n}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 12 & -7 \end{vmatrix}}=\frac{p}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -7 & -8 \end{vmatrix}}，\text{即}\frac{m}{4}=\frac{n}{-50}=\frac{p}{-31}$$

取$m=4$，$n=-50$，$p=-31$，得求作的直线方程为

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-50}=\frac{z+2}{-31}$$

17.解：设通过点$A(0,0,0)$的平面方程为$A(x-0)+B(y-0)+C(z-0)=0$

即 $$Ax+By+Cz=0 \qquad (1)$$

又直线$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z-4}{1}$在平面上，则直线的方向向量$\vec{v}$与平面法向量$\vec{n}$垂直

所以 $$2A+B+C=0 \qquad (2)$$

直线上的点 $(3,-4,4)$ 也在该平面上，则

$$3A-4B+4C=0 \qquad （3）$$

由（1），（2），（3）得知，将 A,B,C 作为未知数，有非零解的充要条件为

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix}=0$$

即 $8x-5y-11z=0$，这就是所求的平面方程。

18.解：点 $A(2,0,-1)$ 在直线上，直线的方向向量 $\vec{v}=(1,-1,0)$

$\vec{AP}=(-1,-1,1)$,则 $\vec{AP}$ 与 $\vec{v}$ 的夹角为

$$\cos\theta=\frac{\vec{AP}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{AP}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}=\frac{-1+1+0}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2}}=0$$

所以 $\theta=90^0$

因此点 $P(1,-1,0)$ 到直线的距离为 $d=|AP|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}$

19.解：直线 $\begin{cases}3x-y+2z-6=0\\ x+4y-\lambda z-15=0\end{cases}$ 与 z 轴相交，则有交点坐标为 $(0,0,\ z)$，

由直线方程得 $\begin{cases}2z-6=0\\ -\lambda z-15=0\end{cases}$，求得 $\lambda=-5$

20.解：因为直线与两平面平行，则直线的方向向量垂直于这两平面法向量由所确定的平面，得直线的方向向量为

$$\vec{v}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-4i-13j-k$$

将已知点代入直线的标准方程得

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{13}=\frac{z-5}{1}$$

21.解：设求作的平面为 $Ax+By+Cz+D=0 \qquad (1)$

直线 $\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{4}$ 在该平面上，则有点 $(-5,2,0)$ 在平面上，且直线的方向向量

$\vec{v}=(3,1,4)$ 与平面的法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$ 垂直

所以 $$-5A+2B+D=0 \qquad (2)$$
$$3A+B+4C=0 \qquad (3)$$

又平面与已知平面 $x+y-z+15=0$ 垂直，则它们的法向量垂直

所以 $$A+B-C=0 \qquad (4)$$

联立(2),(3),(4)得 $\begin{cases} A=\frac{5}{39}D \\ B=-\frac{7}{34}D \\ C=-\frac{2}{34}D \end{cases}$

代入（1）式消去 D 并化简得求作的平面方程为

$$5x-7y-2z+39=0$$

22.解：已知点 $A(0,1,4)$，$B(-2,3,0)$，设 AB 的中垂面上任一点的坐标为 $M(x,y,z)$，由两点间的距离公式得 $\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2+(z-4)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2+(z-0)^2}$

化简得 $x-y+2z-1=0$

23.解：平面 $\pi_1: -2x+my-x+11=0$， $\vec{n_1}=(-2,m,-1)$

平面 $\pi_2: mx-y-z=1$， $\vec{n_2}=(m,-1,-1)$

π_1 与 π_2 垂直，则 $\vec{n_1}\perp\vec{n_2}$，所以 $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$

即 $-2m-m+1=0$

所以 $m=\frac{1}{3}$

24.解：根据题意可知直线的方向向量 $\vec{v}=(-1,1,2)$，平面的法向量 $\vec{n}=(2,1,-1)$

$\vec{n}\cdot\vec{v}=2\times(-1)+1\times1+(-1)\times2=-3\neq0$ 且 $\vec{n}$ 与 $\vec{v}$ 不平行，所以直线与平面相交.

令直线方程 $l:\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}=t$，则可得直线的参数方程 $\begin{cases} x=-t \\ y=t+1 \\ z=2t+1 \end{cases}$，

带入平面方程可得 $t=-1$，则得到交点 $(1,0,-1)$，

交角$\sin\angle(l,\pi)=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\vec{v}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}=\dfrac{|-3|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{2}$，则可得直线与平面的交角为$\dfrac{\pi}{6}$.

第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面

一、填空

1. $x^2+y^2=z^2$ 2. $\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$ 双叶双曲面 3. $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$

4. $\frac{x^2}{9-\lambda}+\frac{y^2}{9-\lambda}+\frac{z^2}{4-\lambda}=1$ $\lambda<4$ $4<\lambda<9$

5. $x^2+2y^2+z^2=1$

二、选择

1.B 2.B 3. A 4. C 5. B 6.A

三、计算

1. 解:方程 $(9-k)x^2+(4-k)y^2+(1-k)z^2=1$ (1)

①$k>9$时, (1)式不成立, 不表示任何图形;

②$4<k<9$时, (1)式变为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, 表示双叶双曲线;

③$1<k<4$时, (1)式变为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, 表示单叶双曲线;

④$k<1$时, (1)式变为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 表示椭球面;

⑤$k=1$时, (1)式变为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 表示母线平行于$z$轴的椭圆柱面;

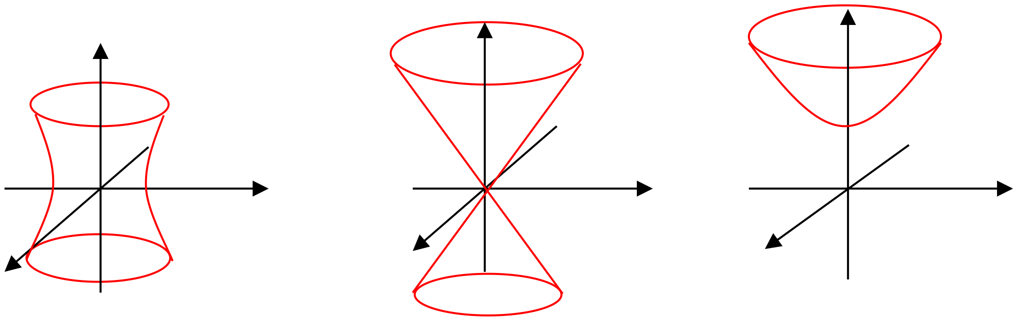
⑥$k=4$时, (1)式变为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$, 表示双曲柱面;

⑦$k=9$时, (1)式变为$-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, 不表示任何图形;

2. 1)解:单叶双曲面(或旋转双曲面)

2)解:锥面(以原点为顶点,以z轴为对称轴)

3)解:旋转抛物面(以$(1,0,0)$为顶点,开口朝上)



3.解：设$M_1(x_1,y_1,z_1,)$为准线上的任意点，那么过M_1的母线为

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1} \qquad (1)$$

且有

$$\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{4}=1 \qquad (2)$$

$$z_1=1 \qquad (3)$$

由（1）、（3）得 $$x_1=\frac{x}{z},y_1=\frac{y}{z} \qquad (4)$$

（1）代入（2）得所求的锥面方程为$\frac{x^2}{9z^2}+\frac{y^2}{4^2z^2}=1$

即 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4^2}-\frac{z^2}{1}=1$.

4.解：设轨迹上任一点的坐标为$P(x，y，z)$，依题意，该圆锥面的轴线与平面$x+y+z=0$垂直，则轴线的方向矢为$\vec{v}=(1,1,1)$，又点$O(0,0,0)$与点$(3,2,1)$在锥面上过这两点的线的方向矢为$l_1=(3,2,1)$，点$O(0,0,0)$与点$P(x，y，z)$的方向矢为$l_2=(x,y,z)$，则有l_1与$\vec{v}$的夹角和l_2与$\vec{v}$的夹角相等，即

$$\frac{x\times1+y\times1+1\times1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{3\times1+2\times1+1\times1}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$$

化简得所求的圆锥面方程为

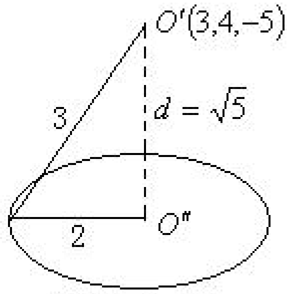
$$11x^2+11y^2+11z^2-14xy-14yz=0$$

5.解：过 z 轴的平面为 $Ax+By=0$ （1）

球面方程化为 $(x-3)^2+(y-4)^2+[z-(-5)]^2=9$

表示球心坐标为 $O'(3,4,-5)$ 到截面圆的圆心的距离为

$d=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$,如题三.4 图所示



习题三.4图

由点到平面的距离公式为

$$\frac{|3A+4B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sqrt{5}$$

化简得 $4A^2+24BA+11B^2=0$

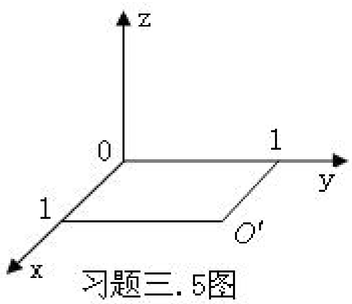
解关于 A 的一元二次方程地 $A=\dfrac{-24B\pm\sqrt{(24B)^2-4\times4\times11B^2}}{2\times4}$

求出 $A_1=-\dfrac{1}{2}B, A_2=-\dfrac{11}{2}B$

分别代入(1)式得 $-\dfrac{1}{2}Bx+By=0,-\dfrac{11}{2}Bx+By=0$

消去 B 得所求平面方程为 $x=2y$ 或 $x=\dfrac{3}{11}y$

6．解:如习题三.5 所示,圆柱面在 xoy 平面上投影的圆心坐标为 $(1,1)$ ，半径为 $\sqrt{2}$ ，所以求作的圆柱面方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$



习题三.5图

7.解:设以 z 轴为母线的柱面方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$ (1)

因为点 $A(,4,2,2)$, $B(6,-3,7)$ 在柱面上,则有

$(4-a)^2+(2-b)^2=R^2$ (2)

$(6-a)^2+(-3-b)^2=R^2$ (3)

则 $(a-0)^2+(b-0)^2=R^2$ (4)

联立(2),(3),(4)求出 $a=\dfrac{25}{8}$, $b=-\dfrac{5}{4}$, $R^2=\dfrac{225}{64}$

代入(1)式得所求的柱面方程为

$$\left(x-\frac{25}{8}\right)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{225}{64}$$

第一章　实数集与函数

一、选择题

1.B　2.B　3.D　4.B　5.D　6.B　7.C　8.C　9.B

二、填空题

1. $+\infty$　1　2. $(0,10]$　3. $(2,3)\cup(3,+\infty)$　4. $\dfrac{1}{2+x}$　5. $[-1,1]$　6. $[-2,0]$

7. 奇　8. $y=\dfrac{1}{2}\left(e^{x}-1\right)$　$y=x$　9. 1　0　10. 1　$\dfrac{1}{2}$　11. $3^{\tan^2 x}$

12. $y=e^{u}$　$u=v^{2}$　$v=\arctan x$　13. $+\infty$　2　14. $\left[\dfrac{1}{e},e\right]$

三、解答题

1.解：令 $t=\dfrac{1}{x}$，则 $x=\dfrac{1}{t}$，

$$f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^{2}}=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^{2}}}=\frac{1}{t}+\sqrt{\frac{t^{2}+1}{t^{2}}}=\frac{1}{t}+\frac{\sqrt{t^{2}+1}}{|t|},$$

所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sqrt{x^{2}+1}}{|x|}$.

2.证明：任取 x_1，$x_2\in(-\infty,+\infty)$，$x_1<x_2$，则

$f(x_1)-f(x_2)=(3x_1-1)-(3x_2-1)=3(x_1-x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以 $f(x)=3x-1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格递增.

3.证明：任取 x_1，$x_2\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，$x_1<x_2$，则有 $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{x_1+x_2}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2}\le\dfrac{x_1-x_2}{2}<0$，

因此 $\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}>0$，$\sin\dfrac{x_1-x_2}{2}<0$，

从而 $f(x_1)-f(x_2)=\sin x_1-\sin x_2=2\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}\sin\dfrac{x_1-x_2}{2}<0$，

即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上严格递增.

4.证明：任取 x_1，$x_2\in[0,\pi]$，$x_1<x_2$，则 $0<\dfrac{x_1+x_2}{2}<\pi$，$-\dfrac{\pi}{2}\le\dfrac{x_1-x_2}{2}<0$，

从而 $\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}>0$， $\sin\dfrac{x_1-x_2}{2}<0$，

$f(x_1)-f(x_2)=-2\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}\sin\dfrac{x_1-x_2}{2}>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，

所以 $f(x)=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上严格递减.

第二章　数列极限

一、填空题

1. $\dfrac{1}{2}$　2. $\dfrac{3}{2}$　0　3. $\dfrac{1}{3}$　4. 10　5. $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$　e　$\sqrt{\mathrm{e}}$

二、判断题

1. ×　2.√　3. ×　4. ×

三、解答题

1.证明：（1）因为 $\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|=\left|\dfrac{n-(n+1)}{n+1}\right|=\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}$，

所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时有 $\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

（2）因为 $\left|\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}-\dfrac{3}{2}\right|=\dfrac{2(3n^2+n)-3(2n^2-1)}{2(2n^2-1)}=\dfrac{2n+3}{2(2n^2-1)}<$

$\dfrac{2n+2n}{2(2n^2-2)}<\dfrac{1}{n-1}(n>2)$，

所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\max\left\{2,\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1\right\}$，当 $n>N$ 时有 $\left|\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}=\dfrac{3}{2}$.

（3）因为 $\left|\dfrac{n!}{n^n}-0\right|=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{3}{n}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n}{n}\le\dfrac{1}{n}$，

所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时有 $\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|<\varepsilon$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

（4）因为 $\left|\sin\frac{\pi}{n}-0\right|<\frac{\pi}{n}<\frac{4}{n}$，

所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{4}{\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时有 $\left|\sin\frac{\pi}{n}-0\right|<\varepsilon$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}=0$.

2.解：（1）原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{3}\cdot\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{3}\cdot\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}=2$.

（2）原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$.

3.解：（1）因为 $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\cdots\sqrt[2^n]{2}=2^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{1}{4}}\cdot2^{\frac{1}{8}}\cdots\cdots2^{\frac{1}{2^n}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=2^{1-\frac{1}{2^n}}=\dfrac{2}{2^{\frac{1}{2^n}}}$，

且 $1<2^{\frac{1}{2^n}}<2^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{2}\to1(n\to\infty)$，

所以根据迫敛性定理知原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{2^{\frac{1}{2^n}}}=2$.

（2）当 $n>2$ 时，$\frac{1}{2}<1-\frac{1}{n}<1$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=1$，

所以根据迫敛性定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}$.

（3）因为$0<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}=\frac{n+1}{n^2}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\to 0\,(n\to\infty)$，

所以根据迫敛性定理知$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=0$.

（4）当$n>3$时，$n^3<3^n$，所以$3=\sqrt[n]{3^n}<\sqrt[n]{n^3+3^n}<\sqrt[n]{3^n+3^n}=3\cdot\sqrt[n]{2}$.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}3\cdot\sqrt[n]{2}=\lim\limits_{n\to\infty}3\cdot 2^{\frac{1}{n}}=3$，所以根据迫敛性定理知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3+3^n}=3$.

（5）因为$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$，且

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$，

所以根据迫敛性定理知$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

（6）因为$0<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}\cdot\frac{3}{\sqrt{3\cdot 5}}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\to 0\,(n\to\infty)$，

所以根据迫敛性定理知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}=0$.

4.证明：令$a_n=n^{(-1)^n}$.

当$n=2k$时，$a_n=2k$，所以$\lim\limits_{k\to\infty}a_n=+\infty$；

当$n=2k-1$时，$a_n=(2k-1)^{-1}=\frac{1}{2k-1}$，所以$\lim\limits_{k\to\infty}a_n=0$.

所以数列$\left\{n^{(-1)^n}\right\}$的极限不存在，即数列$\left\{n^{(-1)^n}\right\}$发散.

5.证明：令$a_n=\cos\frac{n\pi}{4}$.

当$n=8k$时，$a_n=\cos\frac{8k\pi}{4}=\cos 2k\pi=1$，所以$\lim\limits_{k\to\infty}a_n=1$；

当$n=8k+4$时，$a_n=\cos\frac{(8k+4)\pi}{4}=\cos(2k+1)\pi=-1$，所以$\lim\limits_{k\to\infty}a_n=-1$.

所以数列$\left\{\cos\frac{n\pi}{4}\right\}$的极限不存在，即发散.

6.证明：$a_1=\sqrt{2}<2$，设$a_n<2$，则$a_{n+1}=\sqrt{2a_n}<\sqrt{2\times 2}=2$，

所以数列$\{a_n\}$有上界2.

因为 $a_{n+1}-a_n=\sqrt{2a_n}-a_n=\dfrac{\left(\sqrt{2a_n}-a_n\right)\left(\sqrt{2a_n}+a_n\right)}{\sqrt{2a_n}+a_n}=\dfrac{2a_n-a_n^2}{\sqrt{2a_n}+a_n}=\dfrac{a_n(2-a_n)}{\sqrt{2a_n}+a_n}>0$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是单调递增且有上界的数列.

由单调有界定理知数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

设极限为 a，对等式 $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$ 两边同时取极限，有 $a^2=2a$，解得 $a=0$（舍去）或 $a=2$.故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$.

7.证明：由 $a_1=\sqrt{3}>0$ 知 $a_1=\sqrt{3}<\sqrt{a_1+3}=a_2$.

设 $a_k<a_{k+1}$，即 $a_k<\sqrt{a_k+3}$，故 $a_k+3<\sqrt{a_k+3}+3=a_{k+1}+3$，

所以 $\sqrt{a_k+3}<\sqrt{a_{k+1}+3}$，即 $a_{k+1}<a_{k+2}$.

由数学归纳法知，对任意的自然数 n，有 $a_n<a_{n+1}$，即数列 $\{a_n\}$ 单调递增.

又因为当 $c>0$ 时，$a_1=\sqrt{3}<1+\sqrt{3}$，设 $a_n<1+\sqrt{3}$，

则 $a_{n+1}=\sqrt{a_n+c}<\sqrt{1+\sqrt{3}+3}<\sqrt{1+2\sqrt{3}+3}=1+\sqrt{3}$，

所以数列 $\{a_n\}$ 有上界 $1+\sqrt{3}$，

所以由单调有界定理知数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

设极限为 a，对等式 $a_{n+1}{}^2=a_n+3$ 两端取极限，得 $a^2=a+3$，解得 $a=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

由于 $a_n>0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

8.证明：取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，对 $\forall N>0$，取 $m_0>N$，$n_0=2m_0$，则

$$\left|a_{n_0}-a_{m_0}\right|=\frac{1}{m_0+1}+\frac{1}{m_0+2}+\cdots+\frac{1}{2m_0}>m_0\cdot\frac{1}{2m_0}=\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

所以根据柯西收敛准则知数列 $\{a_n\}$ 发散.

第三章　函数极限

一、选择题

1.D　2.A　3.B　4.D　5.D　6.C　7.C　8.A

二、填空题

1.1 1 2.e^3 e^{α} 3. e^2 4.e^{2a} 5.$2-\dfrac{\pi^2}{2}$ 6.1 $\dfrac{2}{3}$ 7.$\dfrac{3^{70}\cdot 8^{20}}{5^{90}}$ 8.$\dfrac{1}{4}$ 5 9.-1

10.0 8 $\sqrt{2}$ 11.0 1

三、判断题

1.× 2.√ 3.√ 4.× 5.√ 6.×

四、解答题

1.证明：（1）当$x>0$时，$\left|\dfrac{6x+5}{x}-6\right|=\left|\dfrac{6x+5-6x}{x}\right|=\dfrac{5}{x}$.

$\forall\varepsilon>0$，只要取$M=\dfrac{5}{\varepsilon}$，当$x>M$时，有$\left|\dfrac{6x+5}{x}-6\right|<\varepsilon$，

故$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x+5}{x}=6$.

（2）当$0<|x-2|<1$时，有

$\left|(x^2-6x+10)-2\right|=\left|x^2-6x+8\right|=|x-2|\cdot|x-4|\le|x-2|(|x-2|+2)<3|x-2|$.

$\forall\varepsilon>0$，只要取$\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{3}\right\}$，则当$0<|x-2|<1$时，有$\left|(x^2-6x+10)-2\right|<\varepsilon$，

故$\lim\limits_{x\to2}(x^2-6x+10)=2$.

（3）当$|x|>2$时，$\left|\dfrac{x^2-5}{x^2-1}-1\right|=\left|\dfrac{x^2-5-x^2+1}{x^2-1}\right|=\left|\dfrac{-4}{x^2-1}\right|=\dfrac{4}{|x+1||x-1|}<\dfrac{4}{x}$.

$\forall\varepsilon>0$，只要取$M=\max\left\{2,\dfrac{4}{\varepsilon}\right\}$，当$|x|>M$时，有$\left|\dfrac{x^2-5}{x^2-1}-1\right|<\varepsilon$，

故$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5}{x^2-1}=1$.

（4）由$\left|\sqrt{4-x^2}\right|=\sqrt{(2+x)(2-x)}\le2\sqrt{|x-2|}<\varepsilon\left(x\in[-2,2]\right)$，得$|x-2|<\dfrac{\varepsilon^2}{4}$.

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\dfrac{\varepsilon^2}{4}$，只要$|x-2|<\dfrac{\varepsilon^2}{4}$，便有$\left|\sqrt{4-x^2}\right|<\varepsilon$，

故$\lim\limits_{x\to2}\sqrt{4-x^2}=0$.

2.解：（1）原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$.

（2）原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}\right)\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}{x(1-\cos x)\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan x-1-\sin x}{2x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{2x(1-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\tan x\cos x}{2x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{2x(1-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

（2）原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1+1-3x}{x^2(1+2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(x-3)}{x^2(1+2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-3}{1+2x}=-3$.

（3）原式$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\left(\sqrt{1+2x}-3\right)\left(\sqrt{1+2x}+3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{1+2x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(1+2x-9)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{1+2x}+3\right)(x-4)}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{1+2x}+3\right)(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{1+2x}+3\right)(x-4)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{1+2x}+3\right)}=\frac{4}{3}.$$

（4）令$x=t+\dfrac{\pi}{2}$，则$x\to\dfrac{\pi}{2}$时相当于$t\to 0$，

故$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-\sin t}{t}=-1$.

（5）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-1+3}{3x-1}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{3x-1}\right)^{2x-1}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{3x-1}\cdot(2x-1)}=e^2$.

（6）因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{-x}=-1$

所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}$不存在.

（7）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}\right)\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)}{2x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{3}{2}.$$

3.解：（1）因为$-1\le\cos x\le 1$，所以$x-1\le x-\cos x\le x+1$.

所以$1+\dfrac{1}{x}\le\dfrac{x-\cos x}{x}\le 1-\dfrac{1}{x}$.

因为$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1$，

所以根据迫敛性定理知$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\cos x}{x}=1$.

（2）因为$-1\le\sin x\le 1$，所以$-x\le x\sin x\le x$.

因为$x\to+\infty$，所以$x^2-4>0$，所以$-\dfrac{x}{x^2-4}\le\dfrac{x\sin x}{x^2-4}\le\dfrac{x}{x^2-4}$.

因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{x}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2-4}=0$，

所以根据迫敛性定理知$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2-4}=0$.

4.解：因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\sin\dfrac{\pi}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\cdot\dfrac{\pi}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi}{\sqrt{x}}=0$，

所以由归结原则可知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$.

5.解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+\dfrac{2}{x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2}{x+1}+(1-a)x-(b+1)\right]$，

所以只有当$a=1$且$b=-1$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$.

6.解：因为$\sqrt{x^2-x+1}-ax-b=\dfrac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+ax+b\right)}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}$

$$=\frac{x^2-x+1-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}=\frac{(1-a^2)x^2-(1+2ab)x+(1-b^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}$$

$$=\frac{\left(1-a^{2}\right)x-\left(1+2ab\right)+\left(1-b^{2}\right)x^{-1}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{2}}}+a+bx^{-1}},$$

所以只有当$1-a^{2}=0$，$1+2ab=0$且$a-1\neq 0$，即$a=-1$，$b=\frac{1}{2}$时，有$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^{2}-x+1}-ax-b\right)=0$.

第四章　函数的连续性

一、选择题

1.A　2.B　3.B　4.C　5.A　6.C

二、填空题

1. 1　$\sqrt{2}$　2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　3. $x=0$　可去　4. 2

三、判断题

1.×　2.√　3.×　4.×

四、解答题

1.证明：由于$f(x)=\sin x$，$g(x)=\begin{cases}x-\pi, x\leq 0,\\ x+\pi, x>0,\end{cases}$

于是$f(g(x))=\begin{cases}\sin(x-\pi), x\leq 0,\\ \sin(x+\pi), x>0.\end{cases}$

所以$\lim\limits_{x\to 0^{-}}f(g(x))=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\sin(x-\pi)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^{+}}f(g(x))=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\sin(x+\pi)=0$.

又因为$f(g(0))=0$，

所以$f(g(x))$在$x=0$处连续.

因为$\lim\limits_{x\to 0^{-}}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^{-}}(x-\pi)=-\pi$，$\lim\limits_{x\to 0^{+}}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}(x+\pi)=\pi$，$g(0)=-\pi$，

所以$x=0$是$g(x)$的跳跃间断点，即$g(x)$在$x=0$处不连续.

2.证明：（1）由题意知，$0\leq a_{2}=f(a_{1})\leq a_{1}$，$0\leq a_{n+1}=f(a_{n})\leq a_{n}$，

所以数列$\{a_{n}\}$单调递减且有下界，根据单调有界定理知数列$\{a_{n}\}$收敛.

（2）设$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n}=t$，且$f$在$[0,+\infty)$上连续，

故对等式$a_{n+1}=f(a_{n})$两边同时取极限得，

$$t=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}f(a_{n})=f\left(\lim_{n\to\infty}a_{n}\right)=f(t),$$

所以 $f(t)=t$.

（3）由 $a_n\geq 0$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=t$ 知 $t\geq 0$，若 $t\neq 0$，则 $t\in(0,+\infty)$ 且 $f(t)<t$，但由（2）知 $f(t)=t$，矛盾，故 $t=0$.

3.证明：（1）令 $x=y=0$，则 $f(0)=f(0)+f(0)$，解得 $f(0)=0$.

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$.

设 $x_0\in\mathrm{R}$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x-x_0+x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x-x_0)+f(x_0)]=f(0)+f(x_0)=f(x_0)$.

所以 $f(x)$ 在 R 上连续.

（2）对整数 p，$q\ (\neq 0)$ 有 $f(p)=pf(1)$，$f\left(\dfrac{1}{q}\right)=\dfrac{1}{q}f(1)$，故对任何有理数 r 有 $f(r)=rf(1)$，结论得证.

4.证明：设 $f(x)=x^5-3x-1$，函数 $f(x)$ 在闭区间 $[1,2]$ 上连续，且 $f(1)=-3<0$，$f(2)=25>0$，即 $f(1)f(x)<0$.由零点定理知，至少存在一个 $x\in(1,2)$，使 $f(x)=0$，即方程 $x^5-3x=1$ 在1与2之间至少存在一个实根.

5.证明：设 $f(x)=x2^x-1$，易知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=-1<0$，$f(1)=1>0$，即 $f(0)f(1)<0$.由零点定理知，至少存在一点 $\xi\in(1,2)$，使 $f(\xi)=0$.

6.证明：构造函数 $F(x)=\mathrm{e}^x-x-2$，则 $F(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且 $F(0)=-1<0$，$F(2)=\mathrm{e}^2-4>0$，即 $F(0)F(2)<0$.由零点定理知，至少存在一点 $\xi\in(0,2)$，使 $F(\xi)=0$，即方程 $x=\mathrm{e}^x-2$ 在 $(0,2)$ 内至少有一实根.

7.证明：令 $F(x)=f(x)-f(x+a)\ (x\in[0,a])$，

则 $F(0)=f(0)-f(a)$，$F(a)=f(a)-f(2a)$，$F(0)+F(a)=f(0)-f(2a)=0$，

所以 $F(0)F(a)\leq 0$.

（1）若 $F(0)F(a)=0$，则 $F(0)=0$ 或 $F(a)=0$，即 $f(0)=f(a)$ 或 $f(a)=f(2a)$，0 和 a 即为所求.

（2）若 $F(0)F(a)\neq 0$，则 $F(0)F(a)<0$，由零点定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F(\xi)=0$，结论得证.

8. 证明：假设 $F(x)=f(x)-g(x)\ \left(x\in[a,b]\right)$，则 $F(a)=f(a)-g(a)<0$，$F(b)=f(b)-g(b)>0$.

因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续，所以 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上也连续，且存在 a,b 使 $F(x)$ 的值异号，于是由零点定理知在 (a,b) 内至少存在一个 c，使得 $F(c)=0$，即在 (a,b) 内至少存在一点 c，使得 $f(c)=g(c)$.

9. 证明：对任给正数 ε，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，当 $\left|x'-x''\right|<\delta$ 时有 $\left|\sin x'-\sin x''\right|\leq\left|x'-x''\right|<\delta<\varepsilon$，故 $\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

10.证明：设 $F(x)=f(x)-f(x+a)$，由于 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，故 $f(x+a)$ 在 $[0,a]$ 上连续，于是 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，于是 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，且 $F(0)=f(0)-f(a)$，$F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$.

（1）若 $f(0)=f(a)$，则 $x=0$，a 均是使得 $f(x)=f(x+a)$ 成立的 x.

（2）若 $f(0)\neq f(a)$，则 $F(0)\cdot F(a)<0$，由零点定理可知，存在 $x\in(0,a)$，使得 $F(x)=0$，即 $f(x)=f(x+a)$.

由（1）（2）知结论成立.

11.证明：任取 $a>0$，$f(x)=\cos\sqrt{x}$ 在 $[0,a]$ 上连续，从而一致连续，即对任给正数 ε，存在正数 δ_1，对 $x_1,x_2\in[0,a]$，当 $\left|x_1-x_2\right|<\delta_1$ 时，有 $\left|\cos\sqrt{x_1}-\cos\sqrt{x_2}\right|<\varepsilon$.

现再考虑 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{a}{2},+\infty\right)$ 上的一致连续性.

由于当 $x_1,x_2\in\left[\dfrac{a}{2},+\infty\right)$ 时，

$$\left|\cos\sqrt{x_1}-\cos\sqrt{x_2}\right|=\left|2\sin\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{2}\sin\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{2}\right|$$

$$\le 2\left|\sin\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{2}\right|\le\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|=\frac{\left|x_1-x_2\right|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\le\frac{1}{\sqrt{2a}}\left|x_1-x_2\right|.$$

对上述 ε，令 $\delta_2=\sqrt{2a}\varepsilon$，当 $x_1-x_2\in\left[\frac{a}{2},+\infty\right)$ 且 $\left|x_1-x_2\right|<\delta_2$ 时，有 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\varepsilon$.

现取 $\delta=\min\left\{\delta_1,\delta_2,\frac{a}{2}\right\}$，当 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ 且 $\left|x_1-x_2\right|<\delta$ 时，必有 $x_1,x_2\in[0,a]$ 或 $x_1,x_2\in\left[\frac{a}{2},+\infty\right)$，从而有 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\varepsilon$.

故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

12.解：因为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

所以一定存在 M 与 m，使得对于 $[a,b]$ 上任一 x 都有 $m\le f(x)\le M$.

因为 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，

所以 $m\le f(x_1)\le M$，$m\le f(x_2)\le M$，…，$m\le f(x_n)\le M$

所以 $nm\le f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\le nM$，

即 $m\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\le M$.

由介值定理可知必存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

13.证明：令 $x_n'=\frac{1}{2n\pi}$，$x_n'=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ $(n=1,2,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n'-x_n''\right)=0$，但

$$\lim_{n\to\infty}\left(f\left(x_n'\right)-f\left(x_n''\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x_n'}-\cos\frac{1}{x_n''}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\cos 2n\pi-\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)=1\ne 0.$$

故 $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续.

第五章　导数和微分

一、选择题

1.B　2.A　3.B　4.D　5.B　6.A　7.C　8.D　9.C　10.B

二、填空题

1. 6　-9　　2.（1）$\ln x\mathrm{d}x$　（2）$(2x\cos 2x-2x^2\sin 2x)\mathrm{d}x$　（3）$\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\mathrm{d}x$

（4）$\dfrac{2}{x(1-\ln x)^2}\mathrm{d}x$　（5）$-\dfrac{x\mathrm{d}x}{|x|\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$　3. -3　4. $3\mathrm{d}x$

5. $\mathrm{e}^x[x^2+2nx+n(n-1)]$　6. 0.545　7. $\varphi(a)=0$

8. $\mathrm{e}^{f(x)}[f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x+f(\mathrm{e}^x)f'(x)]$　9. $2A$

三、判断题

1.×　2.×　3.×　4.√　5.√　6.√　7.×　8.×　9.√

四、解答题

1.证明：设 P 点坐标为 (x_0,x_0^3)，Q 点坐标为 (x_1,x_1^3).

由 $y'=3x^2$ 知 $y'(x_0)=3x_0^2$，过 P 点曲线的切线方程为 $y-x_0^3=3x_0^2(x-x_0)$.

又 Q 点也在切线上，故有 $x_1^3-x_0^3=3x_0^2(x_1-x_0)$.从而 $x_1=-2x_0$.

所以 $y'(-2x_0)=12x_0^2=4y'(x_0)$，

即曲线在 Q 处的切线斜率正好是在 P 处切线斜率的四倍.

2.解：因为 $y=\ln\dfrac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)^2}{2x}=\ln\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}=\ln\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)-\ln x$，

所以 $y'=\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$.

3.解：设 $y_1=x^x$，对其两边同时取对数得 $\ln y_1=\ln x^x=x\ln x$，

两边同时求导得 $\dfrac{y_1'}{y_1}=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$，解出 $y_1'=y_1(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$.

（1）对 $y=x^{x^x}$ 两边同时取对数得 $\ln y=\ln x^{x^x}=x^x\ln x$；

（2）两边同时求导得 $\dfrac{y'}{y}=\left(x^{x}\right)'\ln x+x^{x}\cdot\dfrac{1}{x}=x^{x}(\ln x+1)+x^{x-1}$；

（3）解方程得 $y'=y\left[x^{x}(\ln x+1)+x^{x-1}\right]=x^{x^{x}}\left[x^{x}(\ln x+1)+x^{x-1}\right]$.

4.解：$y'=\cos\left(\dfrac{x}{\sin\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)}\right)\cdot\dfrac{\sin\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)-x\cos\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)\cdot\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin^{2}x}}{\sin^{2}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)}$.

5.证明：由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\left(x^{2}\right)=2xf'\left(x^{2}\right)$，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{2}(x)=2f(x)f'(x)$，知

$2f'(1)=2f(1)f'(1)$，即 $f'(1)(f(1)-1)=0$，所以 $f'(1)=0$ 或 $f(1)=1$.

6.证明：要证在 $x=1$ 处有 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\left(x^{2}\right)=\dfrac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}x^{2}}f^{2}(x)$，即证在 $x=1$ 处有 $\left(f\left(x^{2}\right)\right)'=\left(f^{2}(x)\right)''$.

由于 $\left(f\left(x^{2}\right)\right)'=2xf'\left(x^{2}\right)$，$\left(f^{2}(x)\right)''=\left(2f(x)f'(x)\right)'=2\left[\left(f'(x)\right)^{2}+f(x)f''(x)\right]$，

故将 $f'(1)=1$ 与 $f''(1)=0$ 代入得 $\left(f\left(x^{2}\right)\right)'=\left(f^{2}(x)\right)''$.

7.（1）证明：由题知 $y'=\dfrac{1}{1+x^{2}}$，即 $\left(1+x^{2}\right)y'=1$.

两边对 x 求导得 $\left(1+x^{2}\right)y''+2xy'=0$.

（2）解：因为 $\left(\left(1+x^{2}\right)y''\right)^{(n)}=\left(1+x^{2}\right)y^{(n+2)}+2nxy^{(n+1)}+n(n-1)y^{(n)}$，

$\left(2xy'\right)^{(n)}=2xy^{(n+1)}+2ny^{(n)}$，且由（1）知 $\left(1+x^{2}\right)y''+2xy'=0$，

所以 $\left(1+x^{2}\right)y^{(n+2)}+2x(n+1)y^{(n+1)}+n(n+1)y^{(n)}=0$.

令 $x=0$ 得 $y^{(n+2)}(0)=-n(n+1)y^{(n)}(0)$.

所以 $y^{(n)}=-(n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0)\ (n>2)$

$$=(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)y^{(n-4)}(0)=\cdots$$

因为 $y''(0)=0$，$y'(0)=1$，

所以 $y^{(n)}(0)=\begin{cases}0\ ,\ n=2k\ ,\\(-1)^{k}(2k)!\ ,\ n=2k+1\ .\end{cases}$

*8. 证明：当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$，$f''(x)=\left(-\frac{6}{x^4}+\frac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$ …… $f^{(n)}(x)=P_n(x)e^{-\frac{1}{x^2}}$（$n=1$，$2$，…）式中 $P_n(Z)$ 为 Z 的 $3n$ 次多项式.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{-\frac{1}{x^2}}}=0.$$

设 $f^{(n)}(0)=0$，则由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}P_n\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{-\frac{1}{x^2}}}=0$. 可得 $f^{(n+!)}(0)=0$. 由此即得对任意正整数 n 都有 $f^{(n)}(0)=0$.

9.解：（1）设 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$，$x_0=1$，$\Delta x=0.02$.

由 $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$，$f(x_0)=1$，$f'(x_0)=\frac{1}{3}$，得

$\sqrt[3]{1.02}\approx 1+\frac{1}{3}\times 0.02\approx 1.007$.

（2）设 $f(x)=\lg x$，$x_0=10$，$\Delta x=1$，则 $f'(x)=\frac{1}{x\ln 10}$.

由 $f(x_0)=1$，$f'(x_0)=\frac{1}{10\ln 10}$，得 $\lg 11\approx 1+\frac{1}{10\ln 10}\approx 1.0434$.

（3）设 $f(x)=\sqrt{x}$，$x_0=25$，$\Delta x=1$，则 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

由 $f(x_0)=5$，$f'(x_0)=\frac{1}{10}$，得 $\sqrt{26}\approx 5+\frac{1}{10}=5.1$.

10.证明：（1）$y'=\frac{a(cx+d)-(ax+b)c}{(cx+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}=\frac{1}{(cx+d)^2}\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$.

（2）由于 $\left[\frac{1}{(cx+d)^2}\right]^{(n-1)}=\frac{(-1)^n n!c^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}$，

所以 $y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!c^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$.

11.证明：（1）因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{-\frac{1}{3}}$ 不存在，

所以 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ 在 $x=0$ 处不可导.

（2）由题知 $f(x)=\begin{cases}\ln(x-1), & x\ge 2,\\ -\ln(x-1), & 1<x<2,\\ -\ln(1-x), & 0<x<1,\\ \ln(1-x), & x\le 0.\end{cases}$

因为 $f_+'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\ln(1-x)-0}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left[-\ln(1-x)^{\frac{1}{x}}\right]=-\ln e^{-1}=1$，

$f_-'(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln(1-x)-0}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\left[\ln(1-x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e^{-1}=-1$，

所以 $f_+'(0)\ne f_-'(0)$，所以 $f(x)=\left|\ln|x-1|\right|$ 在 $x=0$ 处不可导.

12.解：（1）$y'=\dfrac{2\varphi(x)\varphi'(x)+2\psi(x)\psi'(x)}{2\sqrt{(\varphi(x))^2+(\psi(x))^2}}=\dfrac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{(\varphi(x))^2+(\psi(x))^2}}$.

（2）$y'=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^2}\cdot\dfrac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\psi^2(x)}=\dfrac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$.

（3）$y'=\left[\dfrac{\ln\psi(x)}{\ln\varphi(x)}\right]'=\dfrac{\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)}\ln\varphi(x)-\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\ln\psi(x)}{(\ln\varphi(x))^2}=\dfrac{\psi'(x)\varphi(x)\ln\varphi(x)-\psi(x)\varphi'(x)\ln\psi(x)}{\psi(x)\varphi(x)(\ln\varphi(x))^2}$.

第六章　微分中值定理及其应用

一、选择题

1.D　2.C　3.D　4.B　5.A　6.D　7.B

二、填空题

1. $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$　2. $e^{-\frac{1}{2}}$　3. e　4. $-\dfrac{1}{2}$　5.（1）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　（2）1　（3）1

（4）1　（5）e^{-1}　（6）1　6. 108　7. 0　5　8. $-\dfrac{2}{3}$　$-\dfrac{1}{6}$　9. $-\dfrac{3}{2}$　$\dfrac{9}{2}$

10. $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{13}{2}\right)$

三、判断题

1.×　2.×　3.√　4.×　5.×　6.×　7.√　8.√　9.×

四、解答题

1.解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-(1+2x)^{-\frac{1}{2}}}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+(1+2x)^{-\frac{3}{2}}}{2}=\dfrac{2}{2}=1$.

（2）$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{1-e^{\sqrt{x}}}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{t}{1-e^t}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{1}{-e^t}=-1$.

（3）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{\tan x-x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x}\cdot\frac{1}{x^2}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2x}{3x^2}}=e^{\frac{1}{3}}$.

2.解：因为$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{g(x)}{x^2}$,

所以由洛必达法则得

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g'(x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=\dfrac{1}{2}g''(0)=\dfrac{3}{2}$.

3.解：（1）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x-1)}{\frac{\pi}{2}\cos(x-1)\cos\frac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{2}{\pi\cos(x-1)}\cdot\dfrac{\sin(x-1)}{\cos\frac{\pi x}{2}}\right]$

$=\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}}=-\dfrac{4}{\pi^2}$.

（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\arctan x)\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\arctan x}{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x\ln^2x}{1+x^2}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2x+2\ln x}{x}=2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+1}{x}=2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

（3）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(1+\tan x-1)^{\tan2x}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x-1)\tan2x}$,

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x-1)\tan2x=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin2x}{\cos2x}=$

$=\sqrt{2}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos2x}=\sqrt{2}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x+\sin x}{-2\sin2x}=\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{-2}=-1$,

所以原式$=e^{-1}$.

（4） $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+x)^{(1+x)}}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2(1+x)}=\dfrac{1}{2}$.

（5） $\lim\limits_{x\to0}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+x\cos x}{2\cos x-x\sin x}=0$.

（6） $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}}=\mathrm{e}^{-1}$.

4.解：（1）因为 $\mathrm{e}^x\sin x=\left[1+x+\dfrac{x^2}{2!}+o\left(x^2\right)\right]\left[x-\dfrac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right]=x+x^2+\dfrac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$，

所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+x^2+\dfrac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)-x-x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{3}+\dfrac{o\left(x^3\right)}{x^3}\right]=\dfrac{1}{3}$.

（2）因为 $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$，

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}{\dfrac{1}{x^2}}\right]=\dfrac{1}{2}$.

（3） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\cot x\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\dfrac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)-x\left[1-\dfrac{x^2}{2!}+o\left(x^2\right)\right]}{x^2\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{3}x+o(x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x}{\sin x}+\dfrac{x}{\sin x}\cdot\dfrac{o(x)}{x}\right]=\dfrac{1}{3}$.

5.证明：（1）记 $f(x)=x^3-3x+c$，用反证法.假设 $f(x)=0$ 在 $[0,1]$ 内有两个不同的实根 x_1， x_2，那么 $f(x_1)=f(x_2)$.

又因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，

所以由罗尔中值定理知存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$.

但 $f'(x)=3\left(x^2-1\right)$ 只有两个实根 $x=\pm1$，因此不存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$，于是推出矛盾.

（2）设 $f(x)=x^n+px+q$，用反证法.

①当$n=2k$（$k=1,2,\cdots$）为偶数时，假设$f(x)=0$至少有三个实根x_1，x_2，x_3，不妨设$x_1<x_2<x_3$，则由罗尔中值定理知：存在$\xi_1\in(x_1,x_2)$，$\xi_2\in(x_2,x_3)$，使得$f'(\xi_1)=2k\xi_1^{2k-1}+p=0$，$f'(\xi_2)=2k\xi_2^{2k-1}+p=0$，但由于幂函数$x^{2k-1}$在$(-\infty,+\infty)$上严格递增，从而$f'(x)=2kx^{2k-1}+p$也在$(-\infty,+\infty)$上严格递增，而$\xi_1<x_2<\xi_2$，所以$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$，于是推出矛盾.

②当$n=2k+1$（$k=1,2,\cdots$）为奇数时，若$k=0$，结论显然成立.若$k=1,2,\cdots$，假设$f(x)=0$至少有四个实根，则由罗尔中值定理知$f'(x)=(2k+1)x^{2k}+p=0$，即$x^{2k}+0\cdot x+\dfrac{p}{2k+1}=0$至少有三个实根，这与（1）的结论矛盾.

6.证明：（1）因为f在$[a,b]$上可导，所以由拉格朗日中值定理知，存在$\xi\in(a,b)$使得$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

又$f'(\xi)\ge m$，故$f(b)-f(a)\ge m(b-a)$，即$f(b)\ge f(a)+m(b-a)$.

（2）因为f在$[a,b]$上可导，所以由拉格朗日中值定理知，存在$\xi\in(a,b)$，使得$|f(b)-f(a)|=|f'(\xi)|(b-a)$.

又$|f'(\xi)|\le M$，所以$|f(b)-f(a)|\le M(b-a)$.

（3）当$x_1=x_2$时结论显然成立，当$x_1\ne x_2$时，对函数$y=\sin x$在以x_1，x_2为端点的区间上应用拉格朗日中值定理得$\sin x_1-\sin x_2=\cos\xi\cdot(x_1-x_2)$，其中$\xi$在$x_1$与$x_2$之间，因此$|\sin x_1-\sin x_2|=|\cos\xi||x_1-x_2|\le|x_1-x_2|$.

7.证明：（1）因为$f(x)=\ln x$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，

所以由拉格朗日中值定理知，存在$\xi\in(a,b)$使得$\ln\dfrac{b}{a}=\ln b-\ln a=\dfrac{b-a}{\xi}$，

所以$\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$.

（2）对函数$f(x)=\arctan x$在$[0,h]$上应用拉格朗日中值定理知，存在$\xi\in(0,h)$使得

$\arctan h=\arctan h-\arctan 0=\dfrac{h}{1+\xi^{2}}$，所以$\dfrac{h}{1+h^{2}}<\arctan h<h$.

8.证明：（1）设$f(x)=\tan x-x+\dfrac{x^{3}}{3}$，则$f^{'}(x)=\tan^{2}x+x^{2}>0$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

所以$f(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内严格递增.

又$f(x)$只在$x=0$处连续且$f(0)=0$，

故当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，$f(x)>0$，即$\tan x>x-\dfrac{x^{3}}{3}$.

（2）设$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，则$f^{'}(x)=\dfrac{(x-\tan x)\cos x}{x^{2}}>0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

令$g(x)=x-\tan x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则$g^{'}(x)=-\tan^{2}x<0$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

故$g(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内严格递减.又$g(x)$在$x=0$处连续，且$g(0)=0$，

故在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内$g(x)<0$，即$x-\tan x<0$，

所以当$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$f^{'}(x)<0$，所以$f(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内严格递减.

由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，所以$\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}<\dfrac{\sin x}{x}<1$，即$\dfrac{2x}{\pi}<\sin x<x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

（3）设$f(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^{2}}{2}$，则$f^{'}(x)=\dfrac{x^{2}}{1+x}>0$（$x>0$），

从而当$x>0$时，f严格递增.又$f(x)$在$x=0$处连续，且$f(0)=0$，

所以当$x>0$时，$f(x)>0$，即$\ln(1+x)>x-\dfrac{x^{2}}{2}$.

9.证明：由于$f^{'}(x)=3x^{2}+a$，对于$\forall x>0$，$f^{'}(x)=3x^{2}+a>0$，

所以$f(x)$单调递增.当$x=0$时，$f(0)=b>0$，所以$f(x)=x^{3}+ax+b$不存在正根.

10.证明：原式等价于 $\tan x\cdot\sin x>x^2$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

设 $f(x)=\tan x\cdot\sin x-x^2$，则

$f'(x)=\sin x(\sec x+1)-2x$，

$f''(x)=3\sec x-\cos x-2$，

$f'''(x)=3\tan x\sec x+\sin x>0$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

故 $f''(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内严格递增.又 $f''(x)$ 在 $x=0$ 处连续且 $f''(0)=0$，

所以 $f''(x)>0$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.故 $f'(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内严格递增.

又 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续且 $f'(0)=0$，所以 $f'(x)>0$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内严格递增，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$f(0)=0$，

所以 $f(x)>0$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，即 $\tan x\cdot\sin x>x^2$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

11.证明：设 $F(x)=\left(b^2-a^2\right)f(x)-[f(b)-f(a)]x^2$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F(a)=F(b)$.故由罗尔中值定理知，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$F'(\xi)=\left(b^2-a^2\right)f'(\xi)-2\xi[f(b)-f(a)]=0,$$

$$即\ 2\xi[f(b)-f(a)]=\left(b^2-a^2\right)f'(\xi).$$

12.证明：设 $g(x)=f(x)-f(x-h)$，并取绝对值充分小的 h，使得 $f''(x)$ 在 $U(a,2|h|)$ 内有定义，则由拉格朗日中值定理知

$f(a+h)+f(a-h)-2f(a)=[f(a+h)-f(a)]-[f(a)-f(a-h)]$

$=g(a+h)-g(a)=g'(\xi_1)h=\left[f'(\xi_1)-f'(\xi_1-h)\right]h=f''(\xi)h^2$，

其中 ξ_1 在 a 与 $a+h$ 之间，ξ 在 ξ_1 与 ξ_1-h 之间.因此

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\lim_{h\to 0}f''(\xi),$$

注意到当$h\to 0$时，有$\xi\to a$，且$f''(x)$在点a连续，所以

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a).$$

13.证明：因为$f(x)=-\sin x$，$g(x)=\cos x$在$[\alpha,\beta]$上连续，在(α,β)内可导，

$f'(x)=-\cos x$，$g'(x)=-\sin x$在(α,β)内不同时为零，$g(\alpha)\neq g(\beta)$，所以由柯西中值

定理知，存在$\theta\in(\alpha,\beta)$，使得$\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}=\cot\theta$.

14.证明：

$$\lim_{x\to 0^+}x^{f(x)}=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{f(x)\ln x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{\frac{1}{\ln x}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-x\ln^2 xf(x)\right)}=\mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln^2 x\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)}=\mathrm{e}^{0\cdot f(0)}=1.$$

15.证明：因为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{\mathrm{e}^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{2\mathrm{e}^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{4x\mathrm{e}^{x^2}}=0$，

所以存在$G>0$，使得当$|x|>G$时$|f(x)|<1$.

又$f(x)$在闭区间$[-G,G]$上连续，

所以存在$M_1>0$，使得对一切$x\in[-G,G]$，有$|f(x)|\le M_1$.

取$M=\max\{1,M_1\}$，则对一切$x\in(-\infty,+\infty)$，都有$|f(x)|\le M$.

故$f(x)$为有界函数.

16.解：设每个小方块边长为x，则盒子的容积为$V(x)=x(a-2x)^2\left(0<x<\dfrac{a}{2}\right)$.

令$V'(x)=12\left(x-\dfrac{a}{6}\right)\left(x-\dfrac{a}{2}\right)=0$，解得$x=\dfrac{a}{6}$或$x=\dfrac{a}{2}$（舍）.

因为$V''\left(\dfrac{a}{6}\right)=-4a<0$，所以$x=\dfrac{a}{6}$是极大值点.

根据实际问题知$x=\dfrac{a}{6}$也为最大值点.

答：当正方形四个角各剪去一块边长为$\dfrac{a}{6}$的小正方形后，能做成容积最大的盒子.

17.解：设两段线长分别为x，$1-x$，则矩形面积为$S=x(1-x)(0<x<1)$.

令 $S' = 1 - 2x = 0$，解得 $x = \dfrac{1}{2}$.

又 $S''\left(\dfrac{1}{2}\right) = -2 < 0$，所以 $x = \dfrac{1}{2}$ 是极大值点.

根据实际问题知 $x = \dfrac{1}{2}$ 也是最大值点.

答：当两段线长均为 $\dfrac{1}{2}$ 时，矩形面积最大.

18.解：设底面的半径为 R，高为 h，则体积为 $V = \pi R^2 h$，表面积为

$$S = \pi R^2 + 2\pi Rh = \pi R^2 + \frac{2V}{R} \quad (R > 0),$$

令 $S' = 2\pi R - \dfrac{2V}{R^2} = 0$，解得 $R = h$.

故当底面半径与高的比例为 $1:1$ 时，容器的表面积最小.

19.解：设 $S = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_n)^2$.

令 $S' = 2\sum_{i=1}^{n}(x - a_i) = 0$，解得 $x = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$.

又 $S'' = 2n > 0$，故 $x = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ 为 S 的唯一极小值点.

又因为 $\lim\limits_{x \to +\infty} S = +\infty$，从而 $x = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ 也是最小值点，即当 $x = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ 表达真值时，它与 n 个数之差的平方和最小.

20.解：设 $f(x) = x + \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$，则 $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$.

令 $f'(x) = 0$，得 $x = 1$ 或 $x = -1$（舍）.

又 $f''(1) = 2 > 0$，所以 $x = 1$ 即为所求.

21.解：设 (a, b) 为抛物线上满足要求的一点（即 $b^2 = 2pa$），由于 $2yy' = 2p$，故 $y' = \dfrac{p}{y}$，

所以 $y'(a) = \dfrac{p}{b}$.于是抛物线在点 (a, b) 的法线方程为 $y = -\dfrac{b}{p}(x - a) + b$.

解方程组$\begin{cases} y=-\dfrac{b}{p}(x-a)+b\ ,(1) \\ y^2=2px\ ,\ (2) \end{cases}$得

$b^2x^2-\left(2b^2a+2pb^2+2p^3\right)x+p^2b^2+b^2a^2+2pb^2a=0$.

设该法线与抛物线的另一交点为$\left(a',b'\right)$，则由韦达定理得

$$a+a'=\frac{2b^2a+2pb^2+2p^3}{b^2},$$

所以$a'=\dfrac{2b^2+2pb^2+2p^3-2b^2}{b^2}$.又$b^2=2pa$，故$a'=\dfrac{(a+p)^2}{a}$.

将上式代入（1）得$b'=-\dfrac{b(a+p)}{a}$.

所以法线被抛物线所截线段长度的平方为$D(a)=\left(a'-a\right)^2+\left(b'-b\right)^2=\dfrac{p(p+2a)^3}{a^2}$.

由$D'(a)=\dfrac{2p(p+2a)^2(a-p)}{a^3}=0$，得$a=p$或$a=-\dfrac{p}{2}$.

由于p与a同号，故$a=p$.于是$b=\pm\sqrt{2}p$.故所求点为$\left(p,\pm\sqrt{2}p\right)$.

第七章　实数的完备性

1、

记 $S=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n}\right\}$.

(ⅰ) 验证 $-1,1$ 皆为 E 的聚点，因 $x_n=1+\frac{1}{2n}\in S$，$\{x_n\}$ 各项互异，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$，故 1 是 S 的聚点；因 $y_n=-1+\frac{1}{2n-1}\in S$，$\{y_n\}$ 各项互异且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=-1$，故 -1 也是 S 的聚点.

(ⅱ) 证明 S 无其他聚点，设实数 $\xi\neq\pm1$，取 $\varepsilon_0=\min\left\{\frac{|\xi+1|}{2},\frac{|\xi-1|}{2}\right\}$，则当 $n>\frac{1}{\varepsilon_0}$ 时，有

$$\left|\xi-(-1)^n-\frac{1}{n}\right|\geqslant|\xi-(-1)^n|-\frac{1}{n}\geqslant 2\varepsilon_0-\frac{1}{n}>\varepsilon_0$$

从而在 $U(\xi;\varepsilon_0)$ 内至多包含 S 的有限多个数，故 ξ 不是 S 的聚点，因此，S 有且只有两个聚点 -1 和 1.

2、

$\{[a_n,b_n]\}$ 满足闭区间套条件.

由题设条件知，$\{[a_n,b_n]\}$ 形成一个闭区间套，所以存在惟一的点 ξ，使得

$$a_n\leqslant\xi\leqslant b_n,n=1,2,\cdots \quad ①$$

因为 $a_{n-1}<a_n,b_n<b_{n-1}(n=2,3,\cdots)$，故 $a_{n-1}<\xi<b_{n-1},n=2,3,\cdots$.

也就是

$$a_n<\xi<b_n,n=1,2,\cdots \quad ②$$

由于满足 ① 式的 ξ 具有惟一性，从而满足 ② 式的 ξ 至多有一个。于是证明了存在惟一的一点 ξ 使得 ② 式成立.

3、

(1) 利用有限覆盖定义证明.

(2) 有限覆盖定义只适用于闭区间，对于开区间不一定成立.

(1) H 能覆盖 $(0,1)$. 因为对任一点 $x\in(0,1)$ 存在正整数 n，使 $\frac{1}{n+2}<x<\frac{1}{n}$. 事实上，要想使 $\frac{1}{n+2}<x<\frac{1}{n}$，也就是 $n<\frac{1}{x}<n+2$，只要取 $n=\left[\frac{1}{x}\right]-1$ 就行.

(2) (ⅰ) 不能从 H 中选出有限个开区间覆盖 $(0,\frac{1}{2})$. 因为对 H 中任意有限个开区间，设其中左端点的最小值为 $\frac{1}{N+2}$，则 $(0,\frac{1}{N+2})$ 中的点不属于这有限个开区间中的任何一个.

(ⅱ) 能从 H 中选出有限个开区间覆盖 $(\frac{1}{100},1)$. 例如选取 $(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n})\in H,n=1,2,\cdots,98$，就能满足要求.

第八章　不定积分

1、

由题意，有 $f'(x)=2x$，即 $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C=f(x)$.

再由于 $y=f(x)$ 过点(2,5)，即 $5=4+C$，故 $C=1$.

因而所求的曲线为 $y=f(x)=x^2+1$.

2、

因为 $y=\dfrac{x^2}{2}\operatorname{sgn}x=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2, & x>0\\ -\dfrac{1}{2}x^2, & x<0\end{cases}$

所以
$$y'=\begin{cases}x, & x>0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

而当 $x=0$ 时，有

$$y'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}(-\frac{1}{2}x)=0$$
$$y'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}(\frac{1}{2}x)=0$$

即
$$y'(0)=0$$

因而
$$(\frac{x^2}{2}\operatorname{sgn}x)'=|x|,x\in\mathbf{R}$$

即 $y=\dfrac{1}{2}x^2\operatorname{sgn}x$ 是 $|x|$ 在 $\mathbf{R}$ 上的一个原函数.

3、

应用换元积分法解题时，先把复杂部分换成简单变量求解，结果要变量还原；不同的换元解出的结果可能不一样，因为原函数不是惟一的.

(1) $\displaystyle\int\cos(3x+4)\mathrm{d}x\xlongequal[\text{则 } \mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}t]{\text{令 } t=3x+4}\int\cos t\cdot\frac{1}{3}\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{3}\sin t+C=\frac{1}{3}\sin(3x+4)+C$$

(2) $\displaystyle\int xe^{2x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int e^{2x^2}\mathrm{d}(2x^2)\xlongequal{\text{令 } t=2x^2}\frac{1}{4}\int e^t\mathrm{d}t=\frac{1}{4}e^t+C=\frac{1}{4}e^{2x^2}+C$

(3) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+2x}\xlongequal[\text{则 } \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t]{\text{令 } 2x+1=t}\int\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$

(4) $\displaystyle\int(1+x)^n\mathrm{d}x\xlongequal[\text{则 } \mathrm{d}x=\mathrm{d}t]{\text{令 } 1+x=t}\int t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}t^{n+1}+C=\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}+C$

(5) $\displaystyle\int(\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-3x^2}})\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-x^2}}+\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-3x^2}}$

$$=\int\frac{\mathrm{d}(\frac{x}{\sqrt3})}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt3})^2}}+\frac{1}{\sqrt3}\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt3x)}{\sqrt{1-(\sqrt3x)^2}}=\arcsin\frac{x}{\sqrt3}+\frac{1}{\sqrt3}\arcsin(\sqrt3x)+C$$

(6) $\int 2^{2x+3}\mathrm{d}x \xlongequal[\text{则 } \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t]{\text{令 } 2x+3=t} \frac{1}{2}\int 2^t \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{2^t}{\ln 2}+C$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2^{2x+3}}{\ln 2}+C = \frac{2^{2x+2}}{\ln 2}+C$

(7) $\int \sqrt{8-3x}\,\mathrm{d}x \xlongequal[\text{则 } \mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\mathrm{d}t]{\text{令 } 8-3x=t} -\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$

$= -\frac{2}{9}(8-3x)^{\frac{3}{2}}+C$

(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{7-5x}} \xlongequal[\text{则 } \mathrm{d}x=-\frac{1}{5}\mathrm{d}t]{\text{令 } 7-5x=t} -\frac{1}{5}\int t^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}t = -\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}+C$

$= -\frac{3}{10}(7-5x)^{\frac{2}{3}}+C$

(9) $\int x\sin x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin x^2\mathrm{d}x^2 \xlongequal{\text{令 } x^2=t} \frac{1}{2}\int \sin t\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cos t+C$

$= -\frac{1}{2}\cos x^2+C$

(10) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(2x+\frac{\pi}{4})} \xlongequal[\text{则 } \mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{d}t]{\text{令 } 2x+\frac{\pi}{4}=t} \frac{1}{2}\int \csc^2 t\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cot t+C$

$= -\frac{1}{2}\cot(2x+\frac{\pi}{4})+C$

(11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int \sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}(\frac{x}{2}) \xlongequal{\text{令 } \frac{x}{2}=t} \int \sec^2 t\mathrm{d}t = \tan t+C$

$= \tan\frac{x}{2}+C$

(12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos(\frac{\pi}{2}-x)} \xlongequal[\text{则 } \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t]{\text{令 } \frac{\pi}{2}-x=t} -\int \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos t}$

$= -\tan\frac{t}{2}+C = -\tan\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}+C$

$= -\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})+C$

(13) $\int \csc x\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{2})}{\tan\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}} \xlongequal{\text{令 } t=\frac{x}{2}} \int \frac{\mathrm{d}t}{\tan t\cdot\cos^2 t}$

$= \int \frac{\mathrm{d}(\tan t)}{\tan t} = \ln|\tan t|+C$

$= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C = \ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right|+C$

$= \ln|\csc x-\cot x|+C$

(14) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2) \xlongequal{令 1-x^2=t} -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} + C = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

(15) $\int \frac{x}{4+x^4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{4+x^4} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+(\frac{x^2}{2})^2}d(\frac{x^2}{2}) \xlongequal{令 \frac{x^2}{2}=t} \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1+t^2}$

$$= \frac{1}{4}\arctan t + C = \frac{1}{4}\arctan \frac{x^2}{2} + C$$

(16) $\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + C$

(17) $\int \frac{x^4}{(1-x^5)^3}dx = -\frac{1}{5}\int \frac{d(1-x^5)}{(1-x^5)^3} \xlongequal{令 1-x^5=t} -\frac{1}{5}\int t^{-3}dt$

$$= -\frac{1}{5}\cdot(-\frac{1}{2})t^{-2} + C = \frac{1}{10}(1-x^5)^{-2} + C$$

(18) $\int \frac{x^3}{x^8-2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx^4}{(x^4)^2-(\sqrt{2})^2} \xlongequal{令 t=x^4} \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2-(\sqrt{2})^2}$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right| + C$$

(19) $\int \frac{dx}{x(1+x)} = \int(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x})dx = \ln|x| - \ln|1+x| + C$

$$= \ln\left|\frac{x}{1+x}\right| + C$$

(20) $\int \cot x dx = \int \frac{d\sin x}{\sin x} \xlongequal{令 t=\sin x} \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C$

(21) $\int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x d\sin x = \int(1-\sin^2 x)^2 d\sin x \xlongequal{令 \sin x=t} \int(1-t^2)^2 dt$

$$= \int(1-2t^2+t^4)dt = t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C$$

$$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

(22) $\int \frac{dx}{\sin x\cdot\cos x} = \int \frac{dx}{\tan x\cos^2 x} = \int \frac{d\tan x}{\tan x} = \ln|\tan x| + C$

(23) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{de^x}{(e^x)^2+1} \xlongequal{令 e^x=t} \int \frac{dt}{t^2+1}$

$$= \arctan t + C = \arctan e^x + C$$

(24) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+8}dx = \int \frac{d(x^2-3x+8)}{x^2-3x+8} \xlongequal{令 x^2-3x+8=t} \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$

$$= \ln|x^2-3x+8| + C$$

(25) $\int \frac{x^2+2}{(x+1)^2}dx = \int \frac{(x+1)^2-2(x+1)+3}{(x+1)^3}d(x+1)$

$$= \int \frac{d(x+1)}{x+1} - 2\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} + 3\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^3}$$

$$\xlongequal{令 x+1=t} \int \frac{dt}{t} - 2\int t^{-2}dt + 3\int t^{-3}dt$$

$$= \ln|t| - 2\cdot(-1)t^{-1} + 3\cdot(-\frac{1}{2})t^{-2} + C$$

$$= \ln|x+1| + \frac{2}{1+x} - \frac{3}{2}(\frac{1}{(1+x)^2}) + C$$

(26) 令 $x = a\tan t$，则 $dx = a\sec^2 t dt$，$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

故 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{dt}{\cos t} = \ln|\sec t + \tan t| + C_1 = \ln|x + \sqrt{a^2+x^2}| + C$

(27) 令 $x = a\tan t$，则 $dx = a\sec^2 t dt$，$|t| < \frac{\pi}{2}$.

故 $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \int \frac{a\sec^2 t}{a^3\sec^3 t}dt = \frac{1}{a^2}\int \cos t dt = \frac{1}{a^2}\sin t + C$

$$= \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + C$$

(28) 令 $x = \sin t$，则　　$dx = \cos t dt$，$|t| < \frac{\pi}{2}$

故 $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{\sin^5 t}{\cos t}\cos t dt = \int \sin^5 t dt = -\int (1-\cos^2 t)^2 d\cos t$

$$= -\int (1-2\cos^2 t + \cos^4 t)d\cos t$$

$$\xlongequal{令 \cos t = u} -\int (1-2u^2+u^4)du = -u + \frac{2}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 + C$$

$$= -\cos t + \frac{2}{3}\cos^3 t - \frac{1}{5}\cos^5 t + C$$

$$= -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}} + C$$

(29) 令 $t = \sqrt[6]{x}$，则　　$dx = 6t^5 dt$，$t \in [0, +\infty)$ 且 $t \neq 1$.

故 $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{t^3}{1-t^2}\cdot 6t^5 dt$

$$= 6\int (-t^6 - t^4 - t^2 - 1 + \frac{1}{2(1+t)} - \frac{1}{2(t-1)})dt$$

$$= -\frac{6}{7}t^7 - \frac{6}{5}t^5 - 2t^3 - 6t + 3\ln|1+t| - 3\ln|t-1| + C$$

$$= -\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} - 2x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{6}} + 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}-1}\right| + C$$

(30) $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx \xlongequal[则 dx = 2tdt]{令 t = \sqrt{x+1}} \int \frac{t-1}{t+1}\cdot 2tdt = 2\int (t-2+\frac{2}{t+1})dt$

$$= t^2 - 4t + 4\ln|t+1| + C$$

$$= x+1-4\sqrt{x+1} + 4\ln|\sqrt{x+1}+1| + C$$

4、

(1) $\int \arcsin x\mathrm{d}x = x\arcsin x - \int \frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

(2) $\int \ln x\mathrm{d}x = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$

(3) $\int x^2\cos x\mathrm{d}x = \int x^2\mathrm{d}\sin x = x^2\sin x - 2\int x\sin x\mathrm{d}x$

$$= x^2\sin x + 2\int x\mathrm{d}\cos x = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x\mathrm{d}x$$

$$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$$

(4) $\int \frac{\ln x}{x^3}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \ln x\mathrm{d}x^{-2} = -\frac{1}{2}\ln x \cdot x^{-2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^4} + C$$

(5) $\int (\ln x)^2\mathrm{d}x = x(\ln x)^2 - 2\int x \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln x\mathrm{d}x = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\mathrm{d}x$

$$= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$$

(6) $\int x\arctan x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \arctan x\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int (1 - \frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C$$

(7) $\int [\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}]\mathrm{d}x = \int \ln(\ln x)\mathrm{d}x + \int \frac{x}{x\ln x}\mathrm{d}x$

$$= \int \ln(\ln x)\mathrm{d}x + \int x\mathrm{d}\ln(\ln x)$$

$$= \int \ln(\ln x)\mathrm{d}x + x\ln(\ln x) - \int \ln(\ln x)\mathrm{d}x + C$$

$$= x\ln(\ln x) + C$$

(8) $\int (\arcsin x)^2\mathrm{d}x \xrightarrow[\text{则 } dx = \cos t dt,\ |t| \leqslant \frac{\pi}{2}]{\text{令 } t = \arcsin x} \int t^2\cos t\mathrm{d}t$

$$= t^2\sin t + 2t\cos t - 2\sin t + C$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$$

(9) 因为 $\int \sec^3 x\mathrm{d}x = \int \sec x \cdot \sec^2 x\mathrm{d}x = \int \sec x\mathrm{d}\tan x$

$$= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x(\tan x)^2\mathrm{d}x$$

$$= \sec x \cdot \tan x - \int \sec^3 x\mathrm{d}x + \int \sec x\mathrm{d}x$$

所以 $\int \sec^3 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec x \cdot \tan x + \frac{1}{2}\int \sec x\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\sec x \cdot \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$$

(10) 因为$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\mathrm{d}x$

$$= x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \frac{x^2 \pm x^2 \mp a^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \sqrt{x^2 \pm a^2}\mathrm{d}x \pm a^2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

所以$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln \mid x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \mid + C$$

5、

(1) $\int [f(x)]^{\alpha} f'(x)\mathrm{d}x = \int [f(x)]^{\alpha}\mathrm{d}f(x) \xlongequal{令 f(x)=t} \int t^{\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1} + C$

$$= \frac{1}{\alpha+1}[f(x)]^{\alpha+1} + C$$

(2) $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}f(x)}{1+[f(x)]^2} \xlongequal{令 t=f(x)} \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan t + C$

$$= \arctan f(x) + C$$

(3) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)} = \ln \mid f(x) \mid + C$

(4) $\int \mathrm{e}^{f(x)} f'(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}f(x) \xlongequal{令 t=f(x)} \int \mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t + C = \mathrm{e}^{f(x)} + C$

6、

(1) $I_n = \int \tan^n x\mathrm{d}x = \int \tan^{n-2}x(\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x$

$$= \int \tan^{n-2}x \cdot \sec^2 x\mathrm{d}x - \int \tan^{n-2}x\mathrm{d}x$$

$$= \int \tan^{n-2}x\mathrm{d}\tan x - I_{n-1} \xlongequal{令 \tan x = t} \int t^{n-2}\mathrm{d}t - I_{n-2}$$

$$= \frac{1}{n-1}t^{n-1} - I_{n-1} = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x - I_{n-2}$$

(2) 因为

$$I(m,n) = \int \cos^m x\sin^n x\,\mathrm{d}x = \int \cos^{m-1}x\sin^n x\,\mathrm{d}\sin x$$

$$= \frac{1}{n+1}\int \cos^{m-1}x\,\mathrm{d}\sin^{n+1}x$$

$$= \frac{1}{n+1}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x + \frac{m-1}{n+1}\int \cos^{m-2}x\sin^{n+2}x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{n+1}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x + \frac{m-1}{n+1}\int \cos^{m-2}x\sin^n x \cdot (1-\cos^2 x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{n+1}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x + \frac{m-1}{n+1}I(m-2,n)\ \frac{m-1}{n+1}\int \cos^m x\sin^n x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{n+1}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x + \frac{m-1}{n+1}I(m-2,n) - \frac{m-1}{n+1}I(m,n)$$

所以 $I(m,n)=\frac{n+1}{m+n}(\frac{1}{n+1}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x+\frac{m-1}{n+1}I(m-2,n))$

$$=\frac{1}{m+n}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x+\frac{m-1}{m+n}I(m-2,n)n,m=2,3,\cdots$$

又因为

$$I(m,n)=\int\cos^m x\sin^{n-1}x\mathrm{d}\cos x=-\frac{1}{m+1}\int\sin^{n-1}x\mathrm{d}\cos^{m+1}x$$

$$=\frac{1}{m+1}\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{m+1}\int\cos^{m+2}x\sin^{n-2}x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{m+1}\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{m+1}\int\cos^m x\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{m+1}\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{m+1}I(m,n-2)-\frac{n-1}{m+1}I(m,n)$$

所以 $I(m,n)=-\dfrac{1}{m+n}\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x+\dfrac{n-1}{m+n}I(m,n-2)\ (n,m=2,3\cdots)$

7、（1）利用上述题 4 中的(1)，这时 $n=3$，故有

$$I_3=\frac{1}{3-1}\tan^{3-1}x-I_{3-2}=\frac{1}{2}\tan^2 x-I_1=\frac{1}{2}\tan^2 x-\int\tan x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\cos x|+C$$

（2）利用上述题 4 中的(1)，这时 $n=4$，故有

$$I_4=\frac{1}{3}\tan^3 x-I_2=\frac{1}{3}\tan^3 x-\int\tan^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\tan^3 x-\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\tan^3 x-\int\sec^2 x\mathrm{d}x+\int\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C$$

（3）利用上述题 4 中的(2)，这时 $m=2,n=4$，故有

$$I(2,4)=-\frac{\cos^3 x\sin^3 x}{6}+\frac{1}{2}I(2,2)$$

$$=\frac{\cos^3 x\sin^3 x}{6}+\frac{1}{2}[-\frac{1}{4}\cos^3 x\sin x+\frac{1}{4}I(2,0)]$$

$$=\frac{\cos^3 x\sin^3 x}{6}-\frac{\cos^3 x\sin x}{8}+\frac{1}{8}I(2,0)$$

$$=-\frac{\cos^3 x\sin^3 x}{6}-\frac{\cos^3 x\sin x}{8}+\frac{1}{8}\int\cos^2 x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\cos^3 x\sin^3 x}{6}-\frac{\cos^3 x\sin x}{8}+\frac{1}{16}\int(1+\cos 2x)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\cos^3 x\sin^3 x}{6}-\frac{\cos^3 x\sin x}{8}+\frac{1}{16}x+\frac{1}{32}\sin 2x+C$$

8、（1）把被积函数转化为多项式和有理真分式之和，(2)(3)(4)(5)(6) 利用分式分解法求解.

$$(1)\int\frac{x^3}{x-1}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{x^3-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x=\int(x^2+x+1)\mathrm{d}x+\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}$$

$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x-1|+C$$

(2) $\int \frac{x-2}{x^2-7x+12}\mathrm{d}x = \int \frac{x-2}{(x-3)(x-4)}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{2}{x-4}-\frac{1}{x-3}\right)\mathrm{d}x$

$$= 2\ln|x-4| - \ln|x-3| + C = \ln\frac{(x-4)^2}{|x-3|} + C$$

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2-x}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

(4) 因为 $\frac{1}{1+x^4} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}$

所以 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}}{8}\int\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)\mathrm{d}x$

$$+\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^2+2\sqrt{x}+1}{x^2-2\sqrt{x}+1}\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}}[\arctan(\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x+1)]+C$$

(5) 因为 $\frac{1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)^2} - \frac{1+x}{4(x^2+1)}$

所以 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \frac{1}{2}\int\frac{x+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int\frac{x+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\int\frac{2x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$$

$$-\frac{1}{8}\int\frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2(x^2+1)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\right) - \frac{1}{8}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{1}{4}\arctan x$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{4(x^2+1)} - \frac{1}{4}\arctan x$$

$$-\frac{1}{8}\ln|x^2+1| - \frac{1}{4}\arctan x + C$$

$$= \frac{1}{8}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \frac{1-x}{4(x^2+1)} - \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

(6) $\int\frac{x-2}{(2x^2+2x+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int\frac{4x-8}{(2x^2+2x+1)^2}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{4}\int\frac{4x+2}{(2x^2+2x+1)^2}\mathrm{d}x - \frac{5}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+2x+1)^2}$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2x^2+2x+1}-\frac{5}{8}\int\frac{dx}{[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}]^2}$$

$$=-\frac{1}{4(2x^2+2x+1)}-\frac{5}{8}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{1}{2}}+2\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}$$

$$=-\frac{5x+3}{2(2x^2+2x+1)}-\frac{5}{2}\arctan(2x+1)+C$$

9、

$$(1)\int\frac{\mathrm{d}x}{5-3\cos x}\xlongequal{令 t=\tan\frac{x}{2}}\int\frac{\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t}{5-3\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{1+(2t)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\arctan 2t+C=\frac{1}{2}\arctan(2\tan\frac{x}{2})+C$$

$$(2)\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin^2 x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{2(\sin^2 x+\cos^2 x)+\sin^2 x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2 x+3\sin^2 x}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}\tan x}{2+3\tan^2 x}=\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan(\frac{\sqrt{6}}{2}\tan x)+C$$

$$(3)\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan x}\xlongequal{令 t=\tan x}\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t^2)}=\frac{1}{2}\int(\frac{1}{1+t}-\frac{t-1}{1+t^2})\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+t}-\frac{1}{4}\int\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|1+t|-\frac{1}{4}\ln|1+t^2|+\frac{1}{2}\arctan t+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(1+t)^2}{1+t^2}+\frac{1}{2}\arctan t+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(1+\tan x)^2}{1+\tan^2 x}+\frac{1}{2}x+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+\frac{x}{2}+C$$

$$(4)\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{5}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}$$

$$\xlongequal[则\ \mathrm{d}x=\frac{\sqrt{5}}{2}\cos t\mathrm{d}t,\ |t|<\frac{\pi}{2}]{令\ x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin t}\int(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\sin t)^2\mathrm{d}t$$

$$=\int(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{5}}{2}\sin t+\frac{5}{4}\sin^2 t)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}t-\frac{\sqrt{5}}{2}\cos t+\frac{5}{4\times 2}\int(1-\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}t-\frac{\sqrt{5}}{2}\cos t+\frac{5}{8}t-\frac{5}{16}\sin 2t+C$$

$$=\frac{7}{8}t-\frac{\sqrt{5}}{2}\cos t-\frac{5}{16}\sin 2t+C$$

$$=\frac{7}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}-\frac{2x+3}{4}\sqrt{1+x-x^2}+C$$

(5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}$

$$= \frac{\text{令 } x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sec t}{\text{则 } dx=\frac{1}{2}\sec t\cdot\tan t dt,\ |t|<\frac{\pi}{2}} \int \sec t dt$$

$$= \ln|\sec t+\tan t|+C = \ln|(2x+1)+2\sqrt{x^2+x}|+C$$

(6) $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx \frac{\text{令 } t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{\text{则 } dx=\frac{-4t}{(1+t^2)^2 dt}} \int (\frac{1+t^2}{1-t^2})^2\cdot t\cdot\frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt$

$$= -4\int \frac{t^2}{(1-t^2)^2}dt = 2\int \frac{t}{(1-t^2)^2}d(1-t^2)$$

$$= -2\int t d(\frac{1}{1-t^2}) = -2(\frac{t}{1-t^2}-\int \frac{dt}{1-t^2})$$

$$= \frac{2t}{t^2-1}+2\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{2t}{t^2-1}-\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+C$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C$$

第九章　定积分

1、

$$\int_0^1 e^x \mathrm{d}x = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}[1-(e^{\frac{1}{n}})^n]}{(1-e^{\frac{1}{n}})\cdot n} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{(-\frac{1}{n})\cdot n} = e-1$$

把积分转化为极限形式，利用极限性质求解.

因 $f(x)=x^3$ 在$[0,1]$上连续，所以 $f(x)$ 在$[0,1]$上可积. 对$[0,1]$进行 n 等分，记其分割为 $T=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$，取 $\xi_i=\frac{i}{n}$ 为区间 $\Delta_i=[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]$ 的右端点，$i=1,2,\cdots,n$，得

$$\int_0^1 x^3\mathrm{d}x = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^3\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}[\frac{1}{4}n^2(n+1)^2]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}(1+\frac{1}{n})^2 = \frac{1}{4}$$

2、 (1) $\int_0^1 (2x+3)\mathrm{d}x = (x^2+3x)\Big|_0^1 = 4$

(2) $\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 (\frac{2}{1+x^2}-1)\mathrm{d}x = (2\arctan t - x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}-1.$

(3) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x = \ln|\ln x|\,|_e^{e^2} = \ln 2$

(4) $\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\Big|_0^1 = \frac{e+e^{-1}}{2}-1$

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x = (\tan x - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}.$

(6) $\int_4^9 (\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})\mathrm{d}x = \int_4^9 (x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})\mathrm{d}x = \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}+1}\right)\Bigg|_4^9 = (\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}})\Big|_4^9 =$

$\frac{44}{3}$

(7) 先求原函数,再求积分值:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} \xlongequal{\sqrt{x}=t} \int \frac{2t}{1+t}\mathrm{d}t = 2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= 2(t-\ln|1+t|)+C = 2[\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})]+C$$

$$\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} = 2[\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})]\Big|_0^4 = 4-2\ln 3$$

(8) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x}(\ln x)^2\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{e}}^{e} (\ln x)^2\mathrm{d}\ln x = \frac{1}{3}(\ln x)^3\Big|_{\frac{1}{e}}^{e} = \frac{2}{3}$

3、

由定积分的定义知，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则可对 $[a,b]$ 用某种特定的分法，并取特殊的点，所得积分和的极限就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分. 因此，遇到求一些和式的极限时，若能将其化为某个可积函数的积分和，就可用定积分求此极限. 这是求和式极限的一种方法.

(1) 把极限化为某一积分和的极限，以便用定积分来计算，为此作如下变形：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}(1+2^3+\cdots+n^3)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{2}{n}\right)^3+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^3\right]\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^3$$

$\cdot\dfrac{1}{n}$，这是函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $[0,1]$ 上的一个积分和的极限. 这里所取的是等分分割，$\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$，而 $\xi_i=\dfrac{i}{n}$ 恒为小区间 $[x_{i-1},x_i]=\left[\dfrac{i-1}{n},\dfrac{i}{n}\right]$ 的右端点，$i=1,2,\cdots,n$. 所以有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}(1+2^3+\cdots+n^3)=\int_0^1 x^3\,dx=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{4}$$

(2) 对所求极限作如下变形：

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{(1+\frac{2}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{(1+\frac{n}{n})^2}\right]\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

不难看出，其中的和式是函数 $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$ 在区间 $[0,1]$ 上的一个积分和，所以有

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n+n)^2}\right]=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}d(1+x)=-\frac{1}{1+x}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

(3) 将所求极限变形：

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{2n^2}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right]\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

这里的和式是函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在区间 $[0,1]$ 上的一个积分和.

于是有

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{2n^2}\right]$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

4、

本题考察积分中值定理的应用.

由题设及积分中值定理有

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\mathrm{d}x = f(\xi_1)(\beta-\alpha) \leqslant f(\alpha)(\beta-\alpha),\alpha \leqslant \xi_1 \leqslant \beta.$$

从而 $$\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x \geqslant f(\alpha) > \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\mathrm{d}x$$

因此可得 $$\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{\alpha}{\beta}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\mathrm{d}x$$

又因 $0<\alpha<\beta<1$,所以 $1-\frac{\alpha}{\beta}<1$,故 $\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{\alpha}{\beta}\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x$.

5、

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值仅在 k 个点 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 处不同,且 $M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{|f(\alpha_i)-g(\alpha_i)|\}$,$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. $\forall\varepsilon>0$,取足够小的 $\delta>0$,当 $\|T\|<\delta$ 时,能使

$\sum\limits_T |g(\xi_i)-f(\xi_i)|\Delta x_i \leqslant 2kM\|T\| < \frac{\varepsilon}{2}$,$\sum\limits_T |f(\xi_i)\Delta x_i - I| < \frac{\varepsilon}{2}$.

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值仅在 k 个点,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 处不同,记 $M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{|f(\alpha_i)-g(\alpha_i)|\}$,$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. $\forall\varepsilon>0$,由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,存在 $\delta_1>0$,使当 $\|T\|<\delta_1$ 时,有 $\left|\sum\limits_T f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

令 $\delta=\min\left\{\delta_1,\frac{\varepsilon}{4kM}\right\}$,则当 $\|T\|<\delta$ 时,有

$$\left|\sum_T g(\xi_i)\Delta x_i - I\right| \leqslant \left|\sum_T g(\xi_i)\Delta x_i - \sum_T f(\xi_i)\Delta x_i\right| + \left|\sum_T f(\xi_i)\Delta x_i - I\right|$$

$$\leqslant \sum_T |g(\xi_i)-f(\xi_i)|\Delta x_i + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \|T\|\cdot\sum_T |g(\xi_i)-f(\xi_i)| + \frac{\varepsilon}{2}$$

当 $\xi_i\neq\alpha_i$ 时,$|g(\xi_i)-f(\xi_i)|=0$,所以上式 $\sum\limits_T |g(\xi_i)-f(\xi_i)|$ 中至多仅有 k 项不为 0,故

$$\left|\sum_T g(\xi_i)\Delta x_i - I\right| \leqslant Mk\|T\| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

这就证明 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积,且 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

$f(x)$ 与 $g(x)$ 在有限个点不同,并不影响 f,g 的可积性质.

换句话说积分是闭区间上的整体性质,只要 f,g 在 $[a,b]$ 上均有界.那么它们积分值就是相等的.

6、

不妨设 $g(x)\geqslant 0, x\in[a,b]$(否则可转为证 $-g(x)$). 因 $m\leqslant f(x)\leqslant M, x\in[a,b]$,所以有 $\quad mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x), x\in[a,b]$.

由定积分的不等式性质,得 $m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$,则由上式知 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$,从而对任何实数 $\mu\in[m,M]$ 均有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x>0$,则得 $m\leqslant\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\leqslant M$.

令 $\mu=\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$,则 $m\leqslant\mu\leqslant M$,且 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

7、

(1) 该极限是"$\dfrac{0}{0}$"型的不定式极限,利用洛必达法则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to 0}\cos x^2=1$$

(2) 该极限是"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型的不定式极限,利用洛必达法则有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{2x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\mathrm{e}^{x^2}}{2x\mathrm{e}^{x^2}}=0$$

8、

取 $f(x)$ 定义域内一点 a,则 $\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)\mathrm{d}t=\int_a^{v(x)}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{u(x)}f(t)\mathrm{d}t$.

令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则 $F'(x)=f(x)$,且 $\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)\mathrm{d}t=F[v(x)]-F[u(x)]$,

于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)\mathrm{d}t&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(v(x))-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(u(x))\\&=F'(v(x))v'(x)-F'(u(x))u'(x)\\&=f(v(x))v'(x)-f(u(x))u'(x)\end{aligned}$$

9、 因为 $$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

对右边第一个积分作代换 $x=-t$,则得

$$\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^0 f(-t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(-t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(-x)\mathrm{d}x$$

于是

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(-x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$$

(1) 若 $f(x)$ 为奇函数,则 $f(x)+f(-x)=0$,故 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=0$.

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数,则 $f(x)+f(-x)=2f(x)$,故

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

10、

构造 $F(a)=\int_a^{a+p}f(x)\mathrm{d}x,F'(a)=0$. 令 $a=0$ 即证.

令 $F(a)=\int_a^{a+p}f(x)\mathrm{d}x$,则 $F'(a)=f(a+p)-f(a)=0$. 从而 $F(a)=c$(常数),令 $a=0$,得 $c=F(0)=\int_0^p f(x)\mathrm{d}x$,故有 $\int_a^{a+p}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^p f(x)\mathrm{d}x$.

11、

当积分限为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时,令 $x=\frac{\pi}{2}-t$;$x\in[0,\pi]$ 时,令 $x=\pi-t$;$x\in[0,2\pi]$ 时,令 $x=2\pi-t$.

(1) 从所要证明等式的被积函数来看,应作代换 $x=\frac{\pi}{2}-t$,则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$,于是有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x$$

(2) 令 $x=\pi-t$,则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$,从而

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=-\int_\pi^0(\pi-t)f(\sin t)\mathrm{d}t=\pi\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x-\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x$$

由此得
$$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x$$

利用本题结论可计算一些定积分.

例如利用(2)有 $\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{\sin x}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}\cos x}{1+\cos^2x}=\frac{\pi^2}{4}$.

12、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x(x-t)f'(t)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t-\int_a^x tf'(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right]-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_a^x tf'(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t+xf'(x)-xf'(x)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(a)$$

由于 $\sin t=(-\cos t)'$,所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x(x-t)\sin t\mathrm{d}t=-\cos x+\cos 0=1-\cos x$$

13、

故
$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

构造积分不等式$\int_a^b [tf(x)-g(x)]^2 \mathrm{d}x \geqslant 0$,展开求得关于 t 的判别式.

若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 可积,则 $f^2(x)$,$g^2(x)$,$f(x)-g(x)$ 都可积,且对任何实数 t,$[tf(x)-g(x)]^2$ 也可积,又$[tf(x)-g(x)]^2 \geqslant 0$,故

$$\int_a^b [tf(x)-g(x)]^2 \mathrm{d}x \geqslant 0$$

即

$$t^2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - 2t\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$$

由此推得关于 t 的二次三项式的判别式非正,即

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 - \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$$

第十章　定积分的应用

1、

先求出交点坐标,对 x 在$[-1,1]$上积分.

如图 10-5 所示. 因为图中两条曲线 $y=x^2$ 和 $y=2-x^2$ 的交点为 $P_1(-1,1)$,$P_2(1,1)$,故所求图形的面积 S 为

$$S=\int_{-1}^{1}(2-x^2-x^2)\mathrm{d}x=2\int_{-1}^{1}(1-x^2)\mathrm{d}x2\left(x-\frac{1}{3}x^3\right|_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$$

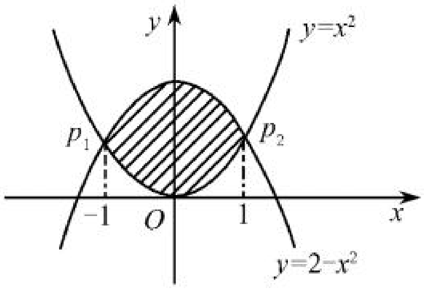


图 10-5

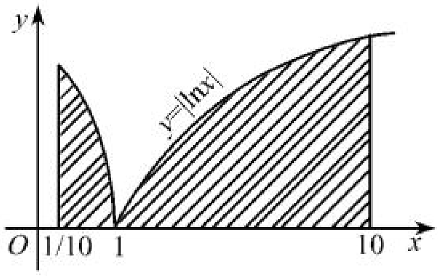


图 10-6

2、　去掉被积函数绝对值符号,再分区间计算.

如图 10-6 所示. 由曲线与直线所围的面积为

$$S=\int_{1/10}^{10}|\ln x|\mathrm{d}x=-\int_{1/10}^{10}\ln x\mathrm{d}x+\int_{1}^{10}\ln x\mathrm{d}x$$

$$=(-x\ln x+x)\Big|_{1/10}^{1}+(x\ln x-x)\Big|_{10}^{1}$$

$$=(99\ln 10-81)/10$$

3、 如图 10-7 所示. 由抛物线 $y^2=2x$ 和圆 $x^2+y^2=8$ 可知,在第一象限的交点为 $P_1(2,2)$,而 S_1 图形是关于 x 轴对称的. 故

$$S_1=2\int_{0}^{2}\left(\sqrt{8-y^2}-\frac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}y=2\pi+\frac{4}{3}$$

而
$$S_2=8\pi-S_1=6\pi-\frac{4}{3}$$

因而
$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{2\pi+\frac{4}{3}}{6\pi-\frac{4}{3}}=\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$$

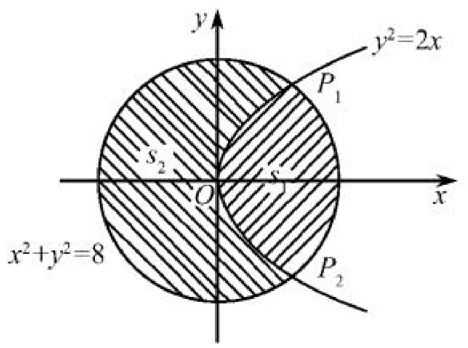


图 10-7

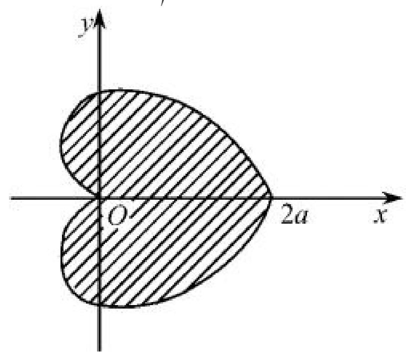


图 10-9

4、如图 10-9 所示. 由于所围图形关于 x 轴对称，故所求的面积为

$$S = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta = a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

$$= a^2\left(\pi + 2\sin\theta\Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta\right)$$

$$= a^2\left(\pi + 0 + 2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}\pi a^2$$

5、

如图 10-14 所示. 由于这两椭圆在第一象限的交点为 $P\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$，而直线 $\overline{OP}$ 的方程为 $y = x$，且图形关于 x 轴，y 轴对称，故所求图形的面积为

$$S = 8\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} - x\right)dx$$

$$= \frac{4b}{a}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a} - 4x^2\right)\Bigg|_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

$$= 4ab\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

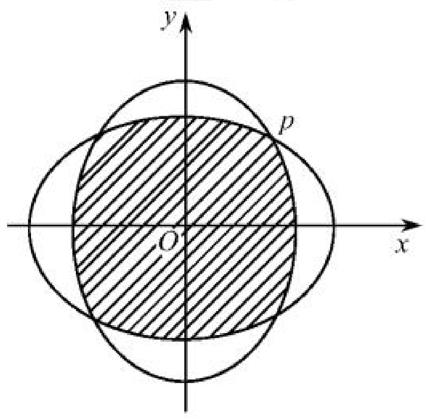


图 10-14

6、

先求出底边界曲线方程,再作截面垂直 x 轴,求出截面面积再求体积.

如图 10-15 所示. 底面边界曲线方程为

$$\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{4^2}=1, x\geqslant 0$$

作截面垂直 x 轴,则与楔形体交面是一个矩形,其截面面积为

$$S(x)=h\cdot 2y=x\tan\alpha\cdot 2\cdot\frac{4}{5}\sqrt{100-x^2}$$

$$=\frac{1}{2}x\cdot\frac{8}{5}\sqrt{100-x^2}=\frac{4}{5}x\sqrt{100-x^2}$$

因而所求的体积为

$$V=\int_0^{10}S(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{5}\int_0^{10}x\sqrt{100-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{4}{15}(100-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{10}$$

$$=\frac{800}{3}(\mathrm{cm}^3)$$

7、

利用旋转体体积公式求解.

(1) 如图 10-16 所示. $y=\sin x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 绕 x 轴所产生的旋转体体积为

$$V=\pi\int_0^{\pi}y^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}\sin^2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2}$$

(2) 由于 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(a>0, 0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 是一摆线,其图形如图 10-17 所示,故所求的旋转体体积为

$$V=\pi\int_0^{2\pi a}y^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{2\pi a}a^2(1-\cos t)^2\cdot\mathrm{d}(a(t-\sin t))$$

$$=\pi a^2\int_0^{2\pi a}(1-\cos t)^2(1-\cos t)\mathrm{d}t$$

$$=\pi a^2\int_0^{2\pi a}(1-\cos t)^3\mathrm{d}t=5\pi^2a^3$$

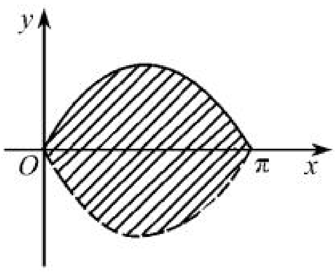


图 10-16

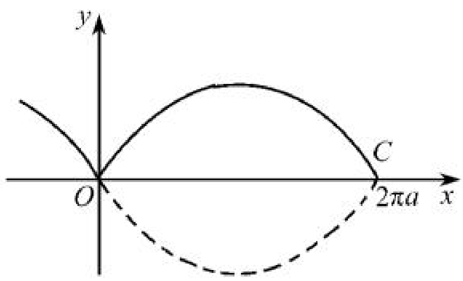


图 10-17

(3) 由于 $r = a(1+\cos\theta)(a>0)$ 为心形线，如图 10-18 所示.

由图可知，曲线关于极轴对称，故只考虑 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ 的情形，而 $\theta = \frac{2\pi}{3} \in (0,\pi)$ 是其稳定点，因而所求的旋转体体积为

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} r^3 \cdot \sin\theta \mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{3}a^3\left(\int_0^{\frac{2\pi}{3}}(1+\cos\theta)^3\sin\theta \mathrm{d}\theta + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}(1+\cos\theta)^3\sin\theta \mathrm{d}\theta\right)$$

$$= \frac{2\pi a^3}{3\cdot 4}\left[(1+\cos\theta)^4\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{0} + (1+\cos\theta)^4\Big|_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}}\right] = \frac{\pi a^3}{3\cdot 2}\cdot 2^4 = \frac{8\pi a^3}{3}$$

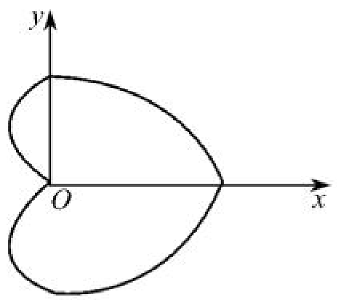


图 10-18

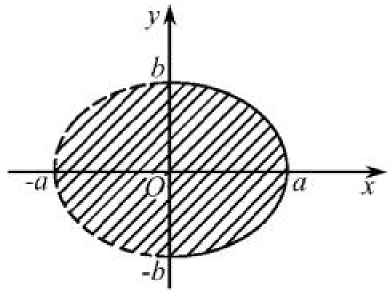


图 10-19

(4) 如图 10-19 所示，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 y 轴所产生的旋转体的体积为

$$V = \pi\int_{-b}^{b} x^2 \mathrm{d}y = \pi\int_{-b}^{b}\left[a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\right]\mathrm{d}y = \pi a^2\int_{-b}^{b}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

8、

(1) 因为 $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$，所以

$$s = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{4+9x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}(4+9x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4$$

$$= \frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$$

(2) 该曲线的图形如图 10-23 所示，而

$$y' = 1-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{故 } s = \int_0^1 \sqrt{1+\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{2x-2\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(1+\sqrt{2})$$

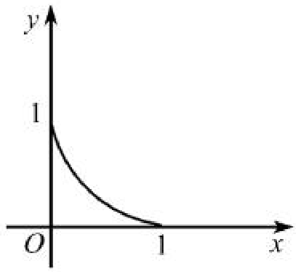


图 10-23

(3) 因为 $x'(t)=3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)$， $y'(t)=3a\sin^2 t\cdot\cos t$

所以 $s=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$

$$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

$$=12a\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t\mathrm{d}t=6a$$

(4) 因为 $x'(t)=at\cos t$， $y'(t)=at\sin t$

所以 $s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2t^2\cos^2 t+a^2t^2\sin^2 t}\mathrm{d}t=a\int_0^{2\pi}t\mathrm{d}t=2a\pi^2$

(5) 因为 $r'(\theta)=3a\sin^2\dfrac{\theta}{3}\cdot\cos\dfrac{\theta}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=a\sin^2\dfrac{\theta}{3}\cdot\cos\dfrac{\theta}{3}$

所以 $s=\int_0^{3\pi}\sqrt{r'^2(\theta)+r^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$

$$=\int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^4\frac{\theta}{3}\cdot\cos^2\frac{\theta}{3}+a^2\sin^6\frac{\theta}{3}}\mathrm{d}\theta$$

$$=a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\theta}{3}\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}a\pi$$

(6) 因为 $r'(\theta)=a$

所以 $s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\theta^2+a^2}\mathrm{d}\theta=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}\mathrm{d}\theta$

$$=\frac{a}{2}\left[\theta\sqrt{1+\theta^2}+\ln(\theta+\sqrt{1+\theta^2})\right]\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})\right]$$

9、

椭圆周长为

$$s_1=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

而正弦弧长为

$$s_2=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$\left(因为\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x\right)$$

要使 $s_1=s_2$，则 $a>b$ 时，由

$$s_1=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2(1-\sin^2 t)}\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t}\mathrm{d}t$$

可知，必须 $b=1, a=\sqrt{2}$

$b>a$ 时，由 $s_1=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2(1-\cos^2 t)+b^2\cos^2 t}\mathrm{d}t$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

可知，必须 $a=1, b=\sqrt{2}$

10、

分成上下两个半弧，分别求出这两个弧的参数方程，再求面积.

(1) 因为 $y' = \cos x$

所以所求的旋转曲面面积为

$$S = 2\pi\int_0^{\pi} y\sqrt{1+y'}\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^{\pi}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= -2\pi\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\mathrm{d}\cos x = 2\pi[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$$

(2) 因为 $x'(t) = a(1-\cos t)$, $y'(t) = a\sin t$

所以 $S = 2\pi\int_0^{2\pi} y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\mathrm{d}t$$

$$= 4\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t = \frac{64}{3}\pi a^2$$

(3) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

当 $a=b$ 时 $x'^2(t)+y'^2(t) = a$

故 $S = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$

$$= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot a\mathrm{d}t = 4\pi a^2$$

当 $a>b$ 时 $x'^2(t)+y'^2(t) = b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t$

故 $S = 2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$

$$= 2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t}\mathrm{d}t$$

$$= 2\pi a\left(a+\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)$$

$$= 2\pi a^2+\frac{2\pi ab^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

当 $a<b$ 时 $x'^2(t)+y'^2(t) = b^2-(b^2-a^2)\sin^2 t$

故 $S = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$

$$= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\sqrt{b^2-(b^2-a^2)\sin^2 t}\mathrm{d}t$$

$$= 2\pi a^2+\frac{2\pi ab^2}{\sqrt{b^2-a^2}}\arcsin\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$$

(4) 曲线 $x^2+(y-a)^2=r^2$ 如图 10-24 所示. 其圆弧可分上、下半圆弧,其参数方程分别为

上半圆弧:$\begin{cases} x=r\cos t \\ y=a+r\sin t \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant \pi$

下半圆弧:$\begin{cases} x=r\cos t \\ y=a-r\sin t \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant \pi$

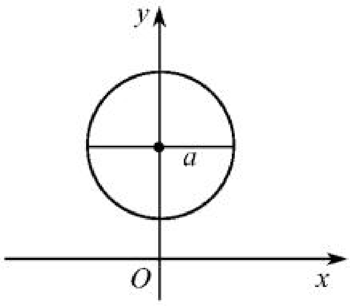


图 10-24

而这上、下两半圆弧绕 x 轴所产生的旋转面面积分别为

$$\begin{aligned} S_1 &= 2\pi\int_0^{\pi} y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt \\ &= 2\pi\int_0^{\pi}(a+r\sin t)\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\,dt \\ &= 2\pi\int_0^{\pi} r(a+r\sin t)\,dt = 2\pi r(a\pi+2r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= 2\pi\int_0^{\pi} y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt \\ &= 2\pi\int_0^{\pi}(a-r\sin t)\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\,dt \\ &= 2\pi\int_0^{\pi} r(a-r\sin t)\,dt = 2\pi r(a\pi-2r) \end{aligned}$$

故所求的旋转曲面的面积为

$$S=S_1+S_2=4\pi^2 ar$$

11、

任取 $[y,y+dy]\subset[0,l]$,对质点引力为 $dF=k\dfrac{m\rho dy}{a^2+y^2}$ dF,在 x 轴上的分力为 $dF_x=dF\cos\alpha=-\dfrac{kam\rho}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy$,在 y 轴上的分力为 $dF_y=dF\sin\alpha=\dfrac{k\rho my}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy$

于是

$$F_x=-kam\rho\int_0^l\frac{dy}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{km\rho}{a\sqrt{a^2+l^2}}$$

$$F_y=km\rho\int_0^l\frac{y}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy=km\rho\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a^2+l^2}}\right]$$

故引力 $F=F_x i+F_y j$.

第十一章　反常积分

1、

(1) 按无穷积分定义先计算定积分 $\int_0^A x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$，然后再考察极限 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 是否存在．若存在则该无穷积分收敛，该极限值即为无穷积分的值．(5) 于积分上下限不正、负无穷，按无穷极分定义将其分为两部分分别讨论极限．(8) 注意积分后带有绝对值符号．

(1) $\because \int_0^A x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\int_0^A \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}(-x^2) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-A^2}+\dfrac{1}{2}$

$$\therefore \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-A^2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

(2) $\because \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2} = \lim\limits_{A\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-A^2}+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$

$$\int_{-\infty}^0 x\mathrm{e}^{-x^2} = \lim_{B\to-\infty}\int_B^0 x\mathrm{e}^{-x^2} = \lim_{B\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-B^2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^0 x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

(3) $\because \int_0^A \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x}} = \int_0^A \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = -2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\Big|_0^A$

$$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x}} = \lim_{A\to+\infty} -2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big|_0^A = 2$$

(4) $\because \int_1^A \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x)} = \int_1^A\left(-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x$

$$= -\ln x - \frac{1}{x} + \ln(1+x)\Big|_1^A$$

$$= \ln\frac{1+A}{A} + 1 - \frac{1}{A} - \ln 2$$

$$\therefore \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x)} = \lim_{A\to+\infty}\left[\ln\frac{1+A}{A}+1-\frac{1}{A}-\ln 2\right] = 1-\ln 2$$

(5) $\because \lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A \dfrac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5} = \lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A \dfrac{1}{(2x+1)^2+2^2}\mathrm{d}x$

$$= \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2}\arctan(2x+1)\Big|_0^A = \frac{\pi}{8}$$

$$\lim_{B\to-\infty}\int_B^0\frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5} = \lim_{B\to-\infty}\int_B^0\frac{1}{(2x+1)^2+2^2}\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{B\to-\infty}\frac{1}{4}\arctan(2x+1)\Big|_B^0$$

$$= \lim_{B\to-\infty}\left[\frac{1}{4}\arctan(2B+1)\right] = \frac{\pi}{8}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5} = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5} + \lim_{B\to-\infty}\int_B^0\frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}$$

$$= \frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

(6) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-x}\sin x\,dx$

$$= \lim_{A\to+\infty}\frac{e^{-x}}{2}(-\sin x-\cos x)\Big|_0^A = \frac{1}{2}$$

(7) $\because \int_0^{+\infty} e^x\sin x\,dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A e^x\sin x\,dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\frac{\sin x-\cos x}{2}\Big|_0^A$

$$= \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2}(\sin A-\cos A+1)\quad \text{发散}$$

而$\int_{-\infty}^0 e^x\sin x\,dx = \lim\limits_{B\to-\infty}\int_B^0 e^x\sin x\,dx = \lim\limits_{B\to-\infty}\frac{\sin x-\cos x}{2}\Big|_B^0$ 发散

$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} e^x\sin x\,dx$ 发散．

(8) $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \lim\limits_{A\to+\infty} |A+\sqrt{A^2+1}|$，发散．

故$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$发散．

2、

(1) 根据瑕积分收敛的定义，即先找出瑕点，然后考察在瑕点处积分的极限$\lim\limits_{u\to a}\int_u^b \frac{dx}{(x-a)^p}$是否存在，从而确定瑕积分是否收敛．

(2) 应清楚 $\ln x$ 的定义成为 $x>0$.

(3) 被积函数出现绝对值号，应按绝对值的定义将其转化成$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$与$\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$两个积分来讨论．

(6) 该瑕积分被积函数为无理式，可作积分代换化为有理式再进行讨论，但应该注意在变换中积分限也应随之变化．

(7) 先将$[0,1]$区间分为$[0,\frac{1}{2}]$和$[\frac{1}{2},1]$两部分再讨论.

(8) 掌握公式$\int\frac{1}{x}dx = \ln x$.

(1) $f(x)=\frac{1}{(x-a)^p}$ 在$(a,b]$上连续，从而在$(a,b]$上可积．$x=a$ 为其瑕点．

由瑕积分定义，知

$$\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^p} = \lim_{u\to a^+}\int_u^b\frac{dx}{(x-a)^p} = \lim_{u\to a^+}\int_u^b (x-a)^{-p}d(x-a)$$

$$= \lim_{u\to a^+}\frac{1}{1-p}(x-a)^{1-p}\Big|_u^b$$

$$= \lim_{u\to a^+}\frac{1}{1-p}[(b-a)^{1-p}-(u-a)^{1-p}]$$

显然当 $p<1$ 时，上式收敛于$\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$，其瑕积分也收敛，其值为$\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$

若 $p\geqslant 1$，则上式发散，其瑕积分也发散．

(2) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} = \lim\limits_{u\to1^-}\int_0^u \frac{dx}{1-x^2}$

$= \lim\limits_{u\to1^-} \frac{1}{2}\int_0^u (\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x})dx$

$= \lim\limits_{u\to1^-} \frac{1}{2}[\int_0^u \frac{1}{1-x}dx+\int_0^u \frac{1}{1+x}dx]$

$= \lim\limits_{u\to1^-} \{-\frac{1}{2}[\ln|1-x|]\Big|_0^u+\frac{1}{2}[\ln|1+x|]\Big|_0^u\}$

$= \lim\limits_{u\to1^-} [-\frac{1}{2}\ln|1-u|+\frac{1}{2}\ln|1+u|]$

上式的极限不存在，故瑕积分$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$发散.

(3) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}+\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

$= \lim\limits_{u\to1^-}\int_0^u (1-x)^{-\frac{1}{2}}dx+\lim\limits_{u\to t^+}\int_u^2 (1-x)^{-\frac{1}{2}}dx$

$= \lim\limits_{u\to1^-}[-2(1-x)^{-\frac{1}{2}}]\Big|_0^u+\lim\limits_{u\to t^+}2(x-1)^{-\frac{1}{2}}\Big|_u^2$

$= \lim\limits_{u\to1^-}[-2(1-u)^{\frac{1}{2}}+2]+\lim\limits_{u\to1t^+}[2-2(u-1)^{\frac{1}{2}}]$

$= 4$

故其瑕积分收敛，其值为 4.

(4) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2)$

$= -\frac{1}{2}\lim\limits_{u\to1^-}\int_0^u (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2)$

$= -\frac{1}{2}\lim\limits_{u\to1^-}2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^u$

$= -\lim\limits_{u\to1^-}(\sqrt{1-u^2}-1) = 1$

故其瑕积分收敛，其值为 1.

(5) $\int_0^1 \ln x dx = \lim\limits_{u\to0^+}\int_u^1 \ln x dx = \lim\limits_{u\to0^+}[x\ln x\Big|_u^1-\int_u^1 dx]$

$= \lim\limits_{u\to0^+}(-u\ln u-1+u) = -1$

故其瑕积分收敛，其值为 -1.

(6) 令$\frac{x}{1-x}=t^2$，则$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}} t\frac{2tdt}{(1+t^2)^2}$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}2[\int_0^{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}}\frac{dt}{1+t^2}-\int_0^{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}}\frac{dt}{(1+t^2)^2}]$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}(\arctan t-\frac{t}{1+t^2})\Big|_0^{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}} = \frac{\pi}{2}$

故其瑕积分收敛，其值为$\frac{\pi}{2}$.

(7) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\arcsin(2x-1)\Big|_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}[-\arcsin(2\varepsilon-1)] + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\arcsin[2(1-\varepsilon)-1]$$

$$= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

故其瑕积分收敛,其值为 π.

(8) $\int_0^1 \frac{d\ln x}{(\ln x)^p}$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (\ln x)^{-p} d\ln x + \int_{\frac{1}{2}}^1 (\ln x)^{-p} d\ln x$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} (\ln x)^{-p} d\ln x + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} (\ln x)^{-p} d\ln x$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{1-p}(\ln x)^{1-p}\Big|_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{1-p}(\ln x)^{1-p}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{1-p}[(\ln\frac{1}{2})^{1-p}-(\ln\varepsilon)^{1-p}]$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{1-p}[(\ln(1-\varepsilon))^{1-p}-(\ln\frac{1}{2})^{1-p}]$$

上面极限式发散,故其瑕积分发散.

3、 此题考察柯西判别法的运用.(6) 应对 m,n 的不同取值情况分别讨论.

(1) $x^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}} \xrightarrow{x\to+\infty} 1$

由柯西判别法知 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ 收敛.

(2) $\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{x}{1-e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{1-e^x} = 0$

由柯西判别法的推论知 $\int_1^{+\infty}\frac{x}{1-e^x}dx$ 收敛.

(3) $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1$

由柯西判别法推论 2,有 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ 发散.

(4) $\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{x\cdot\arctan x}{1+x^3} = \frac{\pi}{2}$,由柯西判别法推论 3,知 $\int_0^{+\infty}\frac{x\cdot\arctan x}{1+x^3}$ 收敛.

(5) 当 $n>1$ 时

$$\lim_{n\to\infty} x^{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}\cdot x^{1+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{n-(1+\frac{1}{n})}}=0\qquad \text{收敛}.$$

当 $n\leqslant 1$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty} x^{1+\frac{1}{n}}\cdot\dfrac{\ln(1+x)}{x^n}\to\infty$ 发散.

(6) $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^m}{1+x^n}dx=\int_0^1\dfrac{x^m dx}{1+x^n}+\int_1^{+\infty}\dfrac{x^m}{1+x^n}dx$

先考虑积分 $\int_0^1\dfrac{x^m}{1+x^n}dx$

$$x^{-m}\cdot\frac{x^m}{1+x^n}=\frac{1}{1+x^n}\xrightarrow{x\to 0^+}1$$

故当且仅当 $m>-1$ 时，积分 $\int_0^1\dfrac{x^m}{1+x^n}dx$ 收敛.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{x^m}{1+x^n}dx$

$$x^{n-m}\cdot\frac{x^m}{1+x^n}=\frac{x^n}{1+x^n}\xrightarrow{x\to+\infty}1$$

故当且仅当 $n-m>1$ 时，积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{x^m}{1+x^n}dx$ 收敛.

综上所述，$\because$ $m\geqslant 0$，当 $n-m>1$ 时，积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^m}{1+x^n}dx(n\geqslant 0)$ 收敛，否则发散.

4、

(1) 充分掌握绝对收敛和条件收敛的判别法则.

(2) 注意 sgn 函数的正确的形式.　(4) 运用狄利克雷判别法判断.

(1) 令 $x=t^2$，$dx=2tdt$

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}dx=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}\cdot 2tdt=2\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$$

而 $\forall u\geqslant 1$，有 $\int_1^u\sin tdt=|\cos 1-\cos u|\leqslant 2$.

而当 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 单调趋于 0. 故由狄利克雷判别法知 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin t}{t}dt$ 收敛.

又
$$\left|\frac{\sin t}{t}\right|\geqslant\frac{\sin^2 t}{t}=\frac{1}{2t}-\frac{\cos 2t}{2t}$$

而其中 $\int_1^{+\infty}\dfrac{dt}{2t}$ 是发散的，$\therefore 2\int_1^{+\infty}\left|\dfrac{\sin t}{t}\right|dt$ 发散.

故 $\int_1^{+\infty}\left|\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}\right|dx$ 发散.

$\therefore\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}dx$ 在 $[1,+\infty]$ 上是条件收敛的.

(2) 由于 $\left|\dfrac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{1+x^2}$，$x\geqslant 0$，而 $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}$ 收敛.

$\therefore\int_0^{+\infty}\dfrac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}dx$ 绝对收敛.

(3) 由于 $\left|\int_0^A \cos x\mathrm{d}x\right| \leqslant 1$，$\dfrac{\sqrt{x}}{100+x}$ 在$[0,+\infty)$上单调且当 $x\to+\infty$ 时趋于 0，由狄利克雷判别法知积分收敛．

又 $$\left|\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}\right| \geqslant \frac{\sqrt{x}}{100+x}\cdot(\cos x)^2 = \frac{\sqrt{x}}{2(100+x)} - \frac{\sqrt{x}}{2(100+x)}\cdot\cos 2x$$

而 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{2(100+x)}\mathrm{d}x$ 发散，$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{2(100+x)}\cos 2x\mathrm{d}x$ 收敛，故积分条件收敛．

(4) ∵ $\left|\int_e^A |\sin x|\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 2$

$\dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x}$ 在$[3,+\infty)$上单调递减且当 $x\to+\infty$ 时趋于 0．

故由狄利克雷判别法知积分收敛．

又 $$\left|\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\cdot\sin x\right| \geqslant \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\cdot\sin^2 x = \frac{\ln(\ln x)}{2\ln x} - \frac{\ln(\ln x)}{2\ln x}\cdot\cos 2x$$

而 $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\mathrm{d}x$ 发散，$\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{2\ln x}\cdot\cos 2x\mathrm{d}x$ 收敛．

从而积分条件收敛．

第十二章　数项级数

1、

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} (n \geqslant 2)$$

于是 $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = 3$，故级数收敛且其和为 3.

(1) 进行积分和差的转化.(4) 以某一项拆分为两项的方式重新组合原式.

(1) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(5k-4)(5k+1)}=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{5k-4}-\frac{1}{5k+1})$

$=\frac{1}{5}(1-\frac{1}{5n+1})$

于是 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{5}$,故级数收敛且其和为$\frac{1}{5}$.

(2) $S_n=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k})=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}$

$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2\times 3^n}$

于是 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{2}$,故级数收敛且其和为$\frac{3}{2}$.

(3) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}]$

$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]$

于是 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}$,故级数收敛且其和为$\frac{1}{4}$.

(4) $S_n=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k})$

$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})-\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{n+2}-\sqrt{2})-(\sqrt{n+1}-1)$

$=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$

于是 $S_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1-\sqrt{2}$,故级数收敛且其和为 $1-\sqrt{2}$.

(5) $S_n=2S_n-S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^{k-1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}$

$=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{2k-1}{2^{k-1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{2^k}-\frac{2n-1}{2^n}$

2、 单项收敛则和也收敛.

由已知条件知,数列$\{a_n\}$收敛于a,即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

故 $$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=a_1-a_{n+1}$$

从而 $$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(a_1-a_{n+1})=a_1-\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=a_1-a$$

3、

(1) 因为 $$S_n=\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=b_{n+1}-b_1$$
$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_1)=\infty$$

故$\sum(b_{n+1}-b_n)$发散.

(2) 当$b_n\neq 0$时
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{b_k}-\frac{1}{b_{k+1}}\right)=\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_{n+1}}$$

即 $$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{b_1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{b_1}$$

故级数$\sum\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)$收敛于$\frac{1}{b_1}$.

4、

(1) 因为
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+n-1}-\frac{1}{a+n}\right)$$

而数列$\left\{\frac{1}{a+n-1}\right\}$收敛于0,故由第4题的结论,可知
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{1}{a+1-1}-0=\frac{1}{a}\quad(a\neq 0)$$

(2) 因为
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{(-1)^n}{n}-\left(-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)\right]$$

而数列$\left\{-\frac{(-1)^n}{n}\right\}$收敛于0,故
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=-\frac{(-1)^1}{1}-0=1$$

(3) 因为
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1}\right]$$

而数列$\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$收敛于0,故
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}=\frac{1}{1^2+1}-0=\frac{1}{2}$$

5、

(1) 由于 $|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|=|\frac{\sin 2^{m+1}}{2^{m+1}}+\frac{\sin 2^{m+2}}{2^{m+2}}+\cdots\frac{\sin 2^{m+p}}{2^{m+p}}|$

$$<\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^{m+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{m+p}}=\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^{m+p}}<\frac{1}{2^m}$$

因此，对任意的 $\varepsilon>0$. 取 $m=\left[\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right]$ 使得当 $m>N$ 及 $\forall p\in N_+$，由上式就有 $|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\varepsilon$ 成立，故由柯西准则可推出 $\sum\frac{\sin 2^n}{2^n}$ 收敛.

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}=\frac{1}{2}>\frac{1}{4}$，故取 $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$. 对任一 $N\in N_+$，总存在 $m_0>0$，和 $p_0=1$，有

$$|u_{m_0+1}|=\frac{(m_0+1)^2}{2(m_0+1)^2+1}>\frac{1}{4}=\varepsilon_0$$

由柯西准则可知 $\sum\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$ 发散.

(3) 由于数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 单调减小，故

$$|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p}|=\left|\frac{1}{m_0+1}-\frac{1}{m_0+2}+\cdots+(-1)^{p-1}\frac{1}{m_0+p}\right|$$

$$<\frac{1}{m_0+1}<\frac{1}{m_0}$$

因此，$\forall\varepsilon>0$，取

$$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$$

当 $m_0>N$ 及 $p\in N_+$ 时，都有 $|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p}|<\varepsilon$ 成立.

由柯西准则可知级数 $\sum(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛.

(4) 取 $$\varepsilon_0=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$\forall N\in N_+$，及取 $m_0=2N, p_0=m_0$，则当 $m_0>N$ 时，就有

$$\left|\sum_{k=1}^{p_0}\frac{1}{\sqrt{(m_0+k)+(m_0+k)^2}}\right|>\sum_{k=1}^{p_0}\frac{1}{\sqrt{2(m_0+k)^2}}=\sum_{k=1}^{p_0}\frac{1}{\sqrt{2}(m_0+k)}$$

$$>\sum_{k=1}^{p_0}\frac{1}{\sqrt{2}(m_0+m_0)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

由柯西准则知 $\sum\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$ 发散.

6、

而正项级数$\sum \frac{1}{n}$发散，所以级数$\sum(\sqrt[n]{a}-1)$发散．

(8) 因为
$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}=\frac{1}{e^{\ln(\ln n)\ln n}}=\frac{1}{(e^{\ln n})^{\ln(\ln n)}}=\frac{1}{n^{\ln(\ln n)}}<\frac{1}{n^2}$$

而正项级数$\sum \frac{1}{n^2}$收敛，所以级数$\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$收敛．

(9) 因为
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2}{(\frac{1}{2n})^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a^{\frac{1}{2n}}-a^{-\frac{1}{2n}})^2}{(\frac{1}{2n})^2}$$
$$\overset{令\, t=\frac{1}{2n}}{=\!=\!=\!=}\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{a^t-a^{-t}}{t}\right)^2=(2\ln a)^2$$

而正项级数$\sum(\frac{1}{2n})^2$收敛，所以级数$\sum(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2)$收敛．

(1) 将原式同$\frac{1}{n^2}$比较得出结果.(2) 考虑 $\sin\frac{\pi}{3^n}\cdot 2^n \sim \pi(\frac{2}{3})^n$.(6) 识记$\sum\frac{1}{n}$数列是发散的.(7) 先做代换 $t=\frac{1}{n}$.

(1) 因为
$$0\leqslant\frac{1}{n^2+a^2}<\frac{1}{n^2}$$

而正项级数$\sum\frac{1}{n^2}$收敛,所以级数$\sum\frac{1}{n^2+a^2}$收敛.

(2) 因为
$$0<2^n\sin\frac{\pi}{3^n}\sim\pi\left(\frac{2}{3}\right)^n\quad(n\to\infty)$$

而正项级数$\sum\pi\left(\frac{2}{3}\right)^n$收敛,所以级数$\sum 2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$收敛.

(3) 因为
$$\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\geqslant\frac{1}{n+1}\geqslant 0$$

而正项级数$\sum\frac{1}{n+1}$发散,所以级数$\sum\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$发散.

(4) 因为
$$0<\frac{1}{(\ln n)^n}<\frac{1}{2^n}\quad(n>\mathrm{e}^2)$$

而正项级数$\sum\frac{1}{2^n}$收敛,所以级数$\sum\frac{1}{(\ln n)^n}$收敛.

(5) 因为
$$1-\cos\frac{1}{n}\sim\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2(n\to+\infty)$$

而正项级数$\sum\frac{1}{2n^2}$收敛,所以级数$\sum\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$收敛.

(6) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,故 $\exists N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,有
$$\sqrt[n]{n}<2$$
即
$$\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}>\frac{1}{2n}$$

而正项级数$\sum\frac{1}{2n}$发散. 所以级数$\sum\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$发散.

(7) 因为
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}}\xlongequal{令 t=\frac{1}{n}}\lim_{t\to0}\frac{a^t-1}{t}=\lim_{t\to0}\frac{a^t\ln a}{1}=\ln a$$

(4) 运用到$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$知识点. (7) 根据 a、b 不同取值情况考虑.

(1) 因为
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2$$

所以由比式判别法知正项级数 $\sum\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!}$ 发散.

(2) 因为
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{10}=+\infty$$

所以由比式判别法知正项级数 $\sum\frac{(n+1)!}{10^n}$ 发散.

(3) 因为
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$$

所以由根式判别法知正项级数 $\sum\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ 收敛.

(4) 因为
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\mathrm{e}}<1$$

所以由比式判别法知正项级数 $\sum\frac{n!}{n^n}$ 收敛.

(5) 因为
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2}}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2}=\frac{1}{2}<1$$

所以由根式判别法知正项级数 $\sum\frac{n^2}{2^n}$ 收敛.

(6) 因为
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{3^n n!}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{\mathrm{e}}>1$$

所以由比式判别法知正项级数 $\sum\frac{3^n n!}{n^n}$ 发散.

(7) 因为
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{a_n}=\frac{b}{a}$$

所以由根式判别法知,当 $a>b$ 时,正项级数 $\sum\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$ 收敛;当 $a<b$ 时,正项级数 $\sum\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$发散.

8、

(1) 设
$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$$

则 $f(x)$ 在$[1,+\infty)$上为非负递减函数,而
$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$$

故由积分判别法知 $\sum\frac{1}{n^2+1}$ 收敛.

(2) 设
$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$$
则 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上为非负递减函数，而
$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{x}{x^2+1}=1$$
由 $\int_1^{+\infty}\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x$ 发散，于是由积分判别法知 $\sum\frac{n}{n^2+1}$ 发散.

(3) 设
$$f(x)=\frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$$
则 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上为非负递减，而
$$\int_3^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln(\ln x)}=\int_{\ln\ln 3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u}=+\infty$$
故由积分判别法知 $\sum\limits_{n=3}^{n}\frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$ 发散.

(4) 设
$$f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}$$
则 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上非负递减.

ⅰ) 若 $p=1$，这时有
$$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x(\ln\ln x)^q}=\int_{\ln\ln 3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^q}$$
当 $q>1$ 时级数收敛，当 $q\leqslant 1$ 时级数发散.

ⅱ) 若 $p\neq 1$，这时有
$$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}=\int_{\ln\ln 3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^{(p-1)u}u^q}$$
对任意的 q，当 $p-1>0$ 时，取 $t>1$，有
$$\lim_{u\to\infty}u^t\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{(p-1)u}u^q}=0$$
即该积分收敛.

当 $p-1<0$ 时，有
$$\lim_{u\to\infty}u^t\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{(p-1)u}u^q}=+\infty$$
即该积分发散.

即对任意的 q，当 $p>1$ 时级数收敛；当 $p<1$ 时级数发散.

9、

(1) 因为
$$\left|\frac{\sin nx}{n!}\right|\leqslant\frac{1}{n!}$$
而 $\sum\frac{1}{n!}$ 收敛，所以 $\sum\frac{\sin nx}{n!}$ 为绝对收敛.

(2) 因为
$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\frac{n}{n+1}\right|=1\neq 0$$
所以 $\sum(-1)^n\frac{n}{n+1}$ 发散.

(3) 当 $p\leqslant 0$ 时
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}\neq 0$$
故这时级数发散.

当 $p>1$ 时,由于
$$\left|\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}\right|\sim\frac{1}{n^p}$$
而 $\sum\frac{1}{n^p}$ 收敛,故这时级数绝对收敛.

当 $0<p\leqslant 1$ 时,令 $u_n=\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$

则
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n})^p(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}<\frac{n^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n})^p n^{\frac{1}{n+1}}}=\frac{n^{\frac{1}{n(n+1)}}}{(1+\frac{1}{n})^p}$$
而
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^p\to e^p>1,n^{\frac{1}{n(n+1)}}\to 1\quad(n\to\infty)$$
从而当 n 充分大时,有
$$u_{n+1}<u_n$$
即 $\{u_n\}$ 为单调递减,又有
$$\lim_{n\to\infty}u_n=0$$
故由定理 12.11(莱布尼茨判别法) 可知,级数 $\sum\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ 在 $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛.

(4) 因为
$$\left|(-1)^n\sin\frac{2}{n}\right|\sim\frac{2}{n}(n\to\infty)$$
而 $\sum\frac{1}{n}$ 发散,即原级数不是绝对收敛级数,但 $\left\{\sin\frac{2}{n}\right\}$ 是单调递减且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{2}{n}=0$.

所以由莱布尼茨判别法可知 $\sum(-1)^n\sin\frac{2}{n}$ 条件收敛.

(5) 由于 $\sum\frac{1}{n}$ 发散, $\sum(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛,故 $\sum\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$ 发散.

(6) 因为
$$\frac{\ln(n+1)}{n+1}>\frac{1}{n+1}$$
而 $\sum\frac{1}{n+1}$ 发散,即 $\sum\frac{(-1)^n\ln(n+1)}{n+1}$ 不是绝对收敛级数,但 $\left\{\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right\}$ 是单调减且
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}=0$$
所以 $\sum\frac{(-1)^n\ln(n+1)}{n+1}$ 条件收敛.

(7) 因为
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n}=\frac{2}{3}<1$$
所以 $\sum(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$ 绝对收敛.

(8) 因为
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{|x|}{e}$$
所以当 $|x|<e$ 时,原级数绝对收敛;当 $|x|\geqslant e$ 时,原级数发散.

10、

(1) 对 x 进行不同取值情况的讨论. (3) 对原式进行逐级放大,最后得出一个上界.

(1) 数列 $\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}$,当 $x>0$ 时有

$$0<\frac{x^n}{1+x^n}<\frac{x^n}{x^n}=1$$

同时,当 $0<x<1$ 时有

$$\frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}}<\frac{x^n}{1+x^n}$$

即 $\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}$严格递减且有界;

当 $x=1$ 时,原级数为 $\sum\frac{(-1)^n}{2n}$,满足莱布尼兹条件,即收敛;

$x>1$ 时,有

$$\frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}}>\frac{x^n}{1+x^n}$$

即 $\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}$严格递增且有界.

又由于 $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ 是收敛的,故由阿贝尔判别法知原级数收敛.

(2) 由于当 $x\in(0,2\pi)$ 时,有

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

即 $\sum\sin nx$ 的部分和数列有界,而数列 $\left\{\frac{1}{n^a}\right\}(a>0)$ 单调减,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}=0$$

故由狄利克雷判别法知原级数收敛.

(3) 由于

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos^2 kx\right|&=\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos 2kx\right|\\&\leqslant\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2}\right|+\frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos 2kx\right|\\&\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n}\cos k(\pi+2x)\right|\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\pi+2x)}{2\sin\frac{\pi+2x}{2}}-\frac{1}{2}\right|\\&\leqslant 1+\frac{1}{4\left|\sin\frac{\pi+2x}{2}\right|}\end{aligned}$$

即 $\sum(-1)^n\cos^2 nx$ 部分和有界,而数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$单调递减且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

故由狄利克雷判别法知原级数收敛.

11、

设 $$u_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

则由所给条件知 $u_n-u_{n+1}>0$,即数列$\{u_n\}$单调递减,且

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$$

故由莱布尼茨判别法可得出交错级数 $\sum(-1)^{n-1}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 收敛.

12、

该级数为正项级数,且其部分和

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{k-1})}-\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_k)}\right]\\&=1-\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}<1\end{aligned}$$

即数列$\{S_n\}$有界,故原级数收敛.

第十三章　函数列与函数项级数

1、

(1) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = |x| = f(x) \quad (x \in D = (-1,1))$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)| = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-|x|\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}\frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

故 $\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} \rightrightarrows |x|,(n\to\infty),x\in(-1,1)$

(2) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x), x\in(-\infty,+\infty)$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)| = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}\frac{|x|}{1+n^2|x|^2}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$$

故 $\frac{x}{1+n^2x^2}\rightrightarrows 0,(n\to\infty),x\in(-\infty,+\infty)$

(3) 当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)=1$.

当 $0<x\leqslant 1$ 时，只要 $n>\frac{1}{x}-1$，就有 $f_n(x)=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$，于是在 $[0,1]$ 上的极限函数为

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

因 $\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f_n(x)-f(x)|=1(n=1,2\cdots)$，故 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

(4) 易见极限函数为 $f(x)=0, x\in[0,+\infty)$.

(ⅰ) 因为 $\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant+\infty}|f_n(x)-f(x)|=\sup\limits_{0\leqslant x<+\infty}\left|\frac{x}{n}\right|=+\infty$

所以 $\{\frac{x}{n}\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致收敛.

(ⅱ) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[0,1000]}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1000}{n}=0$

故 $$\left\{\frac{x}{n}\right\}\rightrightarrows 0,(n\to\infty),x\in[0,1000]$$

(5) 易见极限函数 $f(x)=0$.

(ⅰ) 因为 $\sup\limits_{x\in[-l,l]}|f_n(x)-f(x)|=\sup\limits_{x\in[-l,l]}\left|\sin\frac{x}{n}\right|\leqslant\frac{l}{n}\to 0,(n\to\infty)$

故 $$\sin\frac{x}{n}\rightrightarrows 0,(n\to\infty),x\in[-l,l]$$

(ⅱ) 因为 $\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|\sin\frac{x}{n}\right|=1$

故 $\left\{\sin\frac{x}{n}\right\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致收敛.

2、

因 $|f_n(x)-f(x)|\leqslant a_n,(x\in D,n=1,2,\cdots)$,且 $a_n\to 0,(n\to\infty)$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|\leqslant \lim_{n\to\infty}a_n=0$$

故 $$f_n(x)\rightrightarrows f(x),(n\to\infty),x\in D$$

3、

(1) $\forall x\in[-r,r]$,有

$$\left|\frac{x^n}{(n-1)!}\right|=\frac{|x|^n}{(n-1)!}\leqslant\frac{r^n}{(n-1)!}$$

令 $u_n=\frac{r^n}{(n-1)!}$,则 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{r}{n}\to 0,(n\to\infty)$,所以 $\sum\frac{r^n}{(n-1)!}$ 收敛,由 M 判别法知,$\sum\frac{x^n}{(n-1)!}$ 在 $[-r,r]$ 上一致收敛.

(2) 令 $u_n(x)=(-1)^{(n-1)},v_n(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$,则 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,有

$\left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right|\leqslant 1,(n=1,2,\cdots)$. 又对每一个 $x\in(-\infty,+\infty)$,$\{v_n(x)\}$ 单调递减,且由 $0\leqslant\frac{x^2}{(1+x^2)^n}\leqslant\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$ 知,$v_n(x)\rightrightarrows 0,(n\to\infty),x\in(-\infty,+\infty)$. 由狄利克雷判别法知 $\sum\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(3) 当 $|x|\geqslant r>0$ 时,有 $\frac{n}{|x|^n}\leqslant\frac{n}{r^n}$,且 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{r}=\frac{1}{r}$. 因此当 $\frac{1}{r}<1$ 即 $r>1$ 时,$\sum\frac{n}{r^n}$ 收敛,由 M 判别法知 $\sum\frac{n}{x^n}$ 在 $|x|\geqslant r>1$ 上一致收敛,当 $r=1$ 时原级数不一致收敛.

(4) 因 $\left|\frac{x^n}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2},(x\in[0,1],n=1,2,\cdots)$,而 $\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛,由 M 判别法知 $\sum\frac{x^n}{n^2}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

(5) 由莱布尼茨判别法知,知 $(-\infty,+\infty)$ 上任意一点 x,$\sum\frac{(-1)^n}{x^2+n}$ 收敛,由于

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

故 $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(6) 当 $x\neq 0$ 时

$$\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|R_n(x)|=\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}=1$$

故 $\sum\frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致收敛.

判断函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在区间 $I=[a,b]$ 上一致收敛的方法可以总结如下:

a. $\sum u_n(x)$ 在 I 上一致收敛 $\Leftrightarrow \sup_{x\in I}|R_n(x)|\to 0,(n\to\infty)$,如本题的第(5)(6)小题.

b. 函数项级数一致收敛的柯西准则.

c. 三个判断函数项级数一致收敛的充分条件:M 判别法,如本题第(1)(3)小题,狄利克雷判别法,如本题第(2)小题,阿贝尔判别法.

以下提到的定理 13.13 即为逐项求积定理，定理 13.10 为可积性定理

4、

$\left|\frac{x^{n-1}}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}(x\in[-1,1])$，由 M 判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n^2}$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛，显然 $\frac{x^{n-1}}{n^2}(n=1,2,\cdots)$，在 $[-1,1]$ 上连续，由定理 13.13 知

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{t^{n-1}}{n^2}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}$$

5、

$\left|\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}\right|\leqslant\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, x\in(-\infty,+\infty)$，由 M 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛，显然 $\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}(n=1,2,\cdots)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，由定理 13.13 有

$$\int_0^x S(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{\cos nt}{n\sqrt{n}}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2\sqrt{n}}$$

6、

由 $\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right|\leqslant\frac{1}{n^3}$，而 $\sum\frac{1}{n^3}$ 收敛，由 M 判别法知 $\sum\frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛。因 $\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)'=\frac{\cos nx}{n^2}$，而 $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$，由 $\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛知 $\sum\frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛。又 $\frac{\cos nx}{n^2}(n=1,2,\cdots)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，从而由定理 13.13 知 $f(x)$ 具有连续的导数，从而 $f(x)$ 也连续。

7、

(1) 由于

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x), x\in[-l,l]$$

从而

$$\sup_{x\in[-l,l]}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[-l,l]}|xe^{-nx^2}|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{1}{2}}\to0(n\to\infty)$$

所以

$$xe^{-nx^2}\rightrightarrows0(n\to\infty), x\in[-l,l]$$

因极限函数 $f(x)=0$，知 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续、可积、可微，且由 xe^{-nx^2} 在 $[-l,l]$ 上连续及定理 13.10 有

$$\int_{-l}^{l}\lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{-l}^{l}f_n(x)\mathrm{d}x$$

但由 $f'_n(x)=e^{-nx^2}(1-2nx^2)$ 知

$$\lim_{n\to\infty}f'_n(x)=\begin{cases}0, & 0<|x|\leqslant l\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

因此

$$[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]'\neq\lim_{n\to\infty}f'_n(x)$$

(2)(ⅰ)易见

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x < +\infty \end{cases}$$

由于$\{f_n(x)\}$的每一项在$[0,+\infty)$上连续，而$f(x)$在$[0,+\infty)$上不连续，所以$\{f_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上不连续，所以$\{f_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上不一致收敛.

由 $f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x < +\infty \end{cases}$ 知，$f(x)$ 在$[0,+\infty)$上不连续、可积、不可微.

(ⅱ)因为

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1 = f(x), x \in [a,+\infty)$$

所以

$$\sup_{x\in[a,+\infty)} | f_n(x) - f(x) | = \sup_{x\in[a,+\infty)} \left| \frac{nx}{1+nx} - 1 \right|$$

$$= \sup_{x\in[a,+\infty)} \left| \frac{1}{1+nx} \right| = \frac{1}{1+na} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

所以 $$\frac{nx}{1+nx} \rightrightarrows 1 \quad (n \to \infty), x \in [a,+\infty) \quad (a > 0)$$

由 $f(x) = 1$ 知 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$上连续、可微，不可积.

8、

设 $f_n(x)$ 的极限函数为 $f(x)$. 对$[a,b]$任作一分割 T，$f(x)$ 在 Δ_i 上的振幅为

$$\omega_i = \sup_{x',x''\in\Delta_i} | f(x') - f(x'') |$$

因 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)(n\to\infty), x \in [a,b]$，所以，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，使

$$| f_N(x') - f(x') | < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

$$| f_N(x'') - f(x'') | < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}. x', x'' \in [a,b]$$

又 $f_N(x)$ 在$[a,b]$上可积，所以对上述 ε，$\exists \delta > 0$，只要 $\| T \| < \delta$，有 $\sum_{i=1}^{n} \omega'_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{3}$，其中

$$\omega'_i = \sup | f_N(x') - f_N(x'') |$$

于是，当 $x', x'' \in \Delta_i$ 时

$$| f(x') - f(x'') | \leqslant | f(x') - f_N(x') | + | f_N(x') - f_N(x'') | + | f_N(x'') - f(x'') |$$

$$< \frac{2\varepsilon}{3(b-a)} + \omega'_i$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{2\varepsilon}{3(b-a)} + \omega'_i \right] \Delta x_i$$

$$= \frac{2\varepsilon}{3(b-a)} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \omega'_i \Delta x_i < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon$$

故 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积.

第十四章　幂级数

1、

(1) 因为
$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$
收敛半径 $R=1$，而当 $x=\pm1$ 时，$\sum(\pm1)^n n$ 均发散，故 $\sum nx^n$ 的收敛区域为 $(-1,1)$。

(2) 因为
$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2 2^n}}=\frac{1}{2}$$
收敛半径 $R=2$，而当 $x=\pm2$ 时，级数 $\sum\frac{(\pm2)^n}{n^2 2^n}$ 是收敛的，故 $\sum\frac{x^n}{n^2 2^n}$ 的收敛区域为 $[-2,2]$。

(3) 因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{1}{4}$

收敛半径 $R=4$，而当 $x=\pm4$ 时，级数 $\sum\frac{(n!)^2}{(2n)!}(\pm4)^n$ 的通项 u_n 有
$$|u_n|=\frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$$
当 $x=-4$ 时，$|u_n|\to+\infty(n\to\infty)$，即级数发散；
当 $x=4$ 时，由于
$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{2n+2}\right)=-\frac{1}{2}<1$$
即由拉贝判别法知 $\sum u_n$ 发散。故 $\sum\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$ 的收敛区域为 $(-4,4)$。

(4) 设 $u_n=r^{n^2}$，$0<r<1$

由于
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{r^{n^2}}=0$$
即级数 $\sum r^{n^2}$ 的收敛半径 $R=+\infty$，收敛区域为 $(-\infty,+\infty)$。

(5) 作变换：$y=x-2$，则原级数为 $\sum u_n=\sum\frac{y^{2n-1}}{(2n-1)!}$

由于
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{y^2}{2n(2n+1)}=0$$
即原级数的收敛半径 $R=+\infty$，收敛区域为 $(-\infty,+\infty)$。

(6) 设 $u_n=\frac{3^n+(-2)^n}{n}$

由于
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=3$$
故收敛半径 $R=\frac{1}{3}$，其收敛区域为 $\left(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$。

当 $x=-\frac{4}{3}$ 时，幂级数 $\sum\frac{3^n+(-2)^n}{n}(-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n$ 是收敛的；

当 $x=-\frac{2}{3}$ 时，幂级数 $\sum\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ 是发散的。

故原级数 $\sum\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ 的收敛区域为 $\left[-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$。

(7) 设 $u_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$

由于
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1$$

即原级数收敛半径 $R=1$，而当 $|x|=1$ 时在原级数发散. 故级数 $\sum\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$ 的收敛区域为 $(-1,1)$.

(8) 设 $u_n=\frac{x^{n^2}}{2^n}$

由于
$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{2}=\begin{cases}0, & |x|<1\\ \frac{1}{2}, & |x|=1\\ +\infty, & |x|>1\end{cases}$$

而当 $|x|>1$ 时，级数发散. 故级数 $\sum\frac{x^{n^2}}{2^n}$ 的收敛半径 $R=1$，收敛区域为 $[-1,1]$.

2、

求幂级数的和函数的方法有多种，这里考察的是典型的逐项求导和逐项求积分的方法.

(1) 由 $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，设 $u_n=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

可知
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=x^2$$

即该级数收敛半径 $R=1$，当 $x=\pm1$ 时，级数 $\sum(\pm1)^{2n+1}\frac{1}{2n+1}$ 是发散的. 故该级数的收敛区域为 $(-1,1)$. 因此，$\forall x\in(-1,1)$，有
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$$

故和函数
$$S(x)=\int_0^x S'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right)'\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-S(0)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},x\in(-1,1)$$

(2) 设 $f(x)=x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$，则该级数的收敛区域为 $(-1,1)$. 即 $x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$ 的和函数
$$S(x)=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\cdot g(x),x\in(-1,1)$$

其中
$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

而
$$\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$$
$$g(x)=\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

故
$$S(x)=\frac{x}{(1-x)^2},x\in(-1,1)$$

(3) 由于该级数的收敛区域为 $(-1,1)$，即该级数的和函数

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n,x\in(-1,1)$$

故 $$S(x)=\left(\int_0^x S(t)\mathrm{d}t\right)'=\left(\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)t^n\mathrm{d}t\right)'=\left(x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}nx^n\right)'$$

$$=\left[\frac{x^2}{(1-x)^2}\right]'=\frac{2x}{(1-x)^3},\quad x\in(-1,1)$$

3、

(1) 设 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$

则由 $$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1$$

即收敛半径 $R=1$，而当 $x=\pm1$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$ 都收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛区域为[$-1,1$].

设 $g(x)=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)},x\in(-1,1)$

则有 $$g'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$g''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$$

从而 $$g'(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t}=-\ln(1-x)$$

$$g(x)=-\int_0^x\ln(1-t)\mathrm{d}t=(1-x)\ln(1-x)+x$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{x}\ln(1-x)+1, & x\in(-1,1),x\neq0\\ 1, & x=1\\ 0, & x=0\end{cases}$$

(2) 设 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

则由 $$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)(n+2)}}=1$$

得收敛半径 $R=1$，而当 $x=\pm1$ 时，级数 $\sum\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 和

$\sum\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)(n+2)}$ 都收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)(n+2)}$ 的收敛区域为[$-1,1$].

令 $g(x)=x^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)(n+2)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)},|x|\leqslant1$

则 $$g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=(1-x)\ln(1-x)+x$$

即 $$g(x)=\int_0^x[(1-t)\ln(1-t)+t]\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{2}(1-x)^2\ln(1-x)-\frac{x}{2}+\frac{3}{4}x^2$$

因此和函数

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}=-\frac{(1-x)^2}{2x^2}\ln(1-x)-\frac{1}{2x}+\frac{3}{4},0<|x|<1$$

而当 $x=1$ 时　　$S(1)=\frac{1}{4}$

当 $x=-1$ 时　　$S(-1)=2\ln\frac{1}{2}+\frac{5}{4}$

当 $x=0$ 时　　$S(0)=0$

$$故\ S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}=\begin{cases}-\frac{(1-x)^2}{2x^2}\ln(1-x)-\frac{1}{2x}+\frac{3}{4}, & 0<|x|<1\\ \frac{1}{4}, & x=1\\ 0, & x=0\\ 2\ln\frac{1}{2}+\frac{5}{4}, & x=-1\end{cases}$$

4、

本题利用逐项求积分的方法进行求和数.

(1) 设数列$\{a_n\}$的公差为$d(n=0,1,2,\cdots)$,则有$a_n=a_0+nd$.

从而
$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{d}{a_0+nd}\right|=1$$

即收敛半径$R=1$.

(2) 由于
$$a_n=a_0+nd$$

所以
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_0}{2^n}+\frac{nd}{2^n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_0}{2^n}+d\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}$$

而
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_0}{2^n}=\frac{a_0}{1-\frac{1}{2}}=2a_0$$

至于
$$d\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}$$

令
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n$$

则
$$\frac{f(x)}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{n-1},\ |x|<2$$

从而
$$\int_0^x\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{n}{2^n}t^{n-1}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\frac{2}{2-x},\ \left|\frac{x}{2}\right|<1$$

所以
$$\frac{f(x)}{x}=\left(\frac{2}{2-x}\right)'=\frac{2}{(2-x)^2}$$

即
$$f(x)=\frac{2x}{(2-x)^2}$$

令$x=1$,可得
$$d\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}=2d$$

因而
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=2a_0+2d=2(a_0+d)$$

注意要先求出$|x|<2$为其收敛条件.

5、

(1) 由于 $$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},x\in(-\infty,+\infty)$$

所以 $$e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!},x\in(-\infty,+\infty)$$

(2) 由于 $$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,x\in(-1,1)$$

所以 $$\frac{x^{10}}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+10},x\in(-1,1)$$

(3) 由于 $$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n,x\in[-1,1)$$

及 $$\frac{1}{\sqrt{1-2x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(2x)^n,x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

所以 $$\frac{x}{\sqrt{1-2x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!\cdot 2^n\cdot x^{n+1}}{(2n)!!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1},x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

(4) 由于 $$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},x\in(-\infty,+\infty)$$

所以 $$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},x\in(-\infty,+\infty)$$

(5) 由于 $$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},x\in(-\infty,+\infty)$$

及 $$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,x\in(-1,1)$$

所以 $$\frac{e^x}{1-x}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)x^n,x\in(-1,1)$$

(6) 由于 $$\frac{x}{1+x-2x^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+2x}\right)$$

且 $$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,|x|<1$$

$$\frac{1}{1+2x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n,|x|<\frac{1}{2}$$

所以 $$\frac{x}{1+x-2x^2}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(1-(-2)^n)x^n,\quad |x|<\frac{1}{2}$$

(7) 由于
$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad |x|<+\infty$$

所以
$$\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n+1}}{t(2n+1)!}\mathrm{d}t$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\mathrm{d}t$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}x^{2n+1},\quad |x|<+\infty$$

(8) 由于
$$\mathrm{e}^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!},\quad |x|<+\infty$$

所以
$$(1+x)\mathrm{e}^{-x}=(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(1-n)}{n!}x^{n+1},\quad |x|<+\infty$$

(9) 由于
$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n},t\in[-1,1]$$

所以
$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t=\int_0^x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right]\mathrm{d}t$$
$$=x+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1},x\in(-\infty,+\infty)$$

6、

(1) 由于 $f(1)=8,f'(1)=15,f''(1)=34,f'''(1)=42,\quad f^{(n)}(1)=0,n\geqslant 4$

所以
$$f(x)=8+15(x-1)+\frac{34}{2!}(x-1)^2+\frac{42}{3!}(x-1)^3$$
$$=8+15(x-1)+17(x-1)^2+7(x-1)^3,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

(2)
$$f(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{1+(x-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n,\quad x\in(0,2)$$

7、

由于 $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\dfrac{1}{2}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-x)^n}{n}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1},\ |x|\leqslant 1$$

所以 $$f(x)=\ln x=2\ln\sqrt{\frac{1+\frac{x-1}{x+1}}{1-\frac{x-1}{x+1}}}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1}$$

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right|<1\quad 即\quad x\in(0,+\infty)$$

第十五章　多元函数的极限与连续

1、

$$(1)\ f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)=\left[\frac{\arctan\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3})}{\arctan\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}-1+\sqrt{3})}\right]^2=\left[\frac{\arctan 1}{\arctan\sqrt{3}}\right]^2=\frac{9}{16}$$

$$(2)\ f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\frac{2\cdot 1\cdot\frac{y}{x}}{1^2+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{2xy}{x^2+y^2}=f(x,y)$$

$$(3)\ f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2-(tx)(ty)\tan\frac{tx}{ty}$$

$$=t^2\left(x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y}\right)=t^2f(x,y)$$

2、

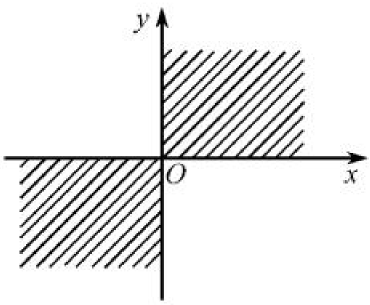


图 16－3

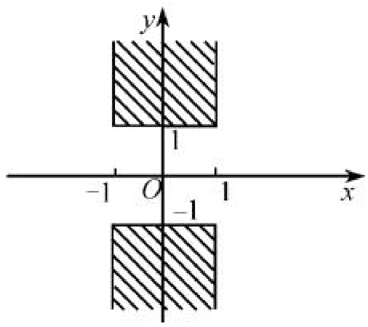


图 16－4

扫码关

(1) 要使 $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ 有定义,必须 $x^2-y^2\neq 0$,即 $y\neq\pm x$,故定义域

$$D=\{(x,y)\mid y\neq\pm x\}$$

D 的图形如图 16－1 所示,D 为开集,非开域(因为不连通).

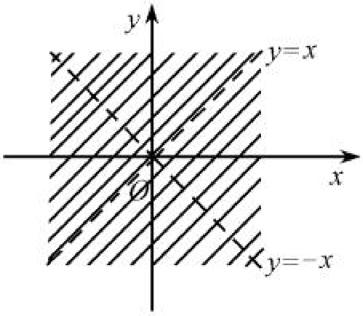


图 16－1

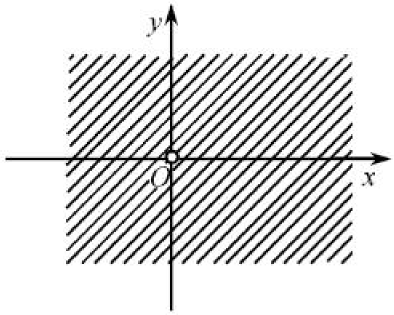


图 16－2

(2) 要使 $f(x,y)=\dfrac{1}{2x^2+3y^2}$ 有定义,必须分母 $2x^2+3y^2\neq 0$,即 $x^2+y^2\neq 0$,故定义域

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 0\}$$

D 的图形如图 16－2 所示,D 为开集,也是开域.

(3) 显然 $f(x,y)=\sqrt{xy}$ 的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0 \text{ 或 } x\leqslant 0,y\leqslant 0\}=\{(x,y)\mid xy\geqslant 0\}$$

D 的图形如图 16－3 所示,D 为闭集,也为闭域.

(4) 要使 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$ 有定义,必须

$$1-x^2\geqslant 0,y^2-1\geqslant 0$$

故定义域 $D=\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1,|y|\geqslant 1\}$

D 的图形如图 16－4 所示，D 为闭集，非区域(因为不连通)。

(5) 显然 $f(x,y)=\ln x+\ln y$ 的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$$

D 的图形如图 16－5 所示，D 为开集，也是开域.

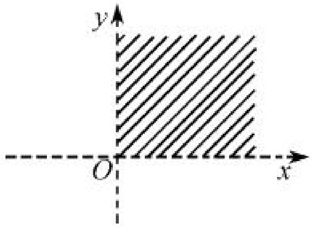


图 16－5

(6) 要使 $f(x,y)=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$ 有定义，必须

$$\sin(x^2+y^2)\geqslant 0$$

即 $2k\pi\leqslant(x^2+y^2)\leqslant(2k+1)\pi,k=0,1,2,\cdots$

故定义域

$$D=\{(x,y)\mid 2n\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2n+1)\pi,n=0,1,2,\cdots\}$$

D 的图如图 16－6 所示，D 为闭集，非区域.

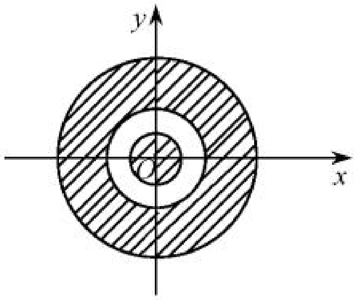


图 16－6

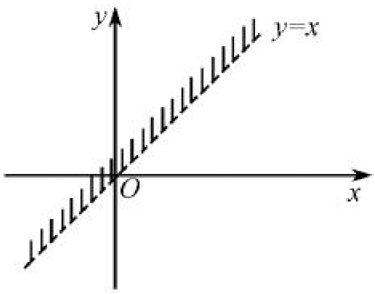


图 16－7

(7) 显然 $f(x,y)=\ln(y-x)$ 的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid y>x\}$$

D 的图形如图 16－7 所示，D 为开集，也是开域.

(8) 显然 $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$ 的定义域

$$D=\mathbf{R}^2$$

故 D 为开集，也是闭集，是开域也是闭域.

(9) 显然 $f(x,y,z)=\dfrac{z}{x^2+y^2+1}$ 的定义域

$$D=\mathbf{R}^3$$

故 D 为开集，也是闭集，是开域也是闭域.

(10) 要使 $f(x,y,z)=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$ 有定义，必须

$$R^2-x^2-y^2-z^2\geqslant 0,x^2+y^2+z^2-r^2>0$$

故定义域 $D=\{(x,y,z)\mid r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$

D 为有界集，但既不是开集，也不是闭集.

3、

(1) 因为 $0\leqslant\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leqslant\frac{x^2y^2}{2|x||y|}=\frac{1}{2}|x||y|\to 0((x,y)\to(0,0))$，所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$$

(2) 作极坐标代换．令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{1+r^2}{r^2}=+\infty$$

(3) 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}-1}=\lim_{r\to 0}(1+\sqrt{1+r^2})=2$$

(4) 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy+1}{x^4+y^4}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\sin\theta\cos\theta+1}{r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}$$

$\forall M>0$，因为 $r\to 0$，所以不妨设 $0<r<1$，由于

$$\frac{r^2\sin\theta\cos\theta+1}{r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}=\frac{\frac{1}{2}r^2\sin 2\theta+1}{r^4\cdot\frac{1}{4}(3+\cos 4\theta)}=\frac{4+2r^2\sin 2\theta}{r^4(3+\cos 4\theta)}>\frac{2}{4r^4}$$

取 $\delta=\min\left(1,\sqrt[4]{\frac{1}{2M}}\right)$，则当 $0<r<\delta$ 时，便有

$$\frac{r^2\sin\theta\cos\theta+1}{r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}>M$$

故

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy+1}{x^4+y^4}=+\infty$$

(5) 因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(2x-y)=0$，由无穷小与无穷大之间的关系，知

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{1}{2x-y}=\infty$$

(6) 因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)=0$，而 $\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant 1$，利用有界函数与无穷小之积仍为无穷小，即知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$$

(7) 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{\sin r^2}{r^2}=1$$

4、

(1) 令 $y=kx(k\neq 0)$，则

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2}{1+k^2}=\frac{k^2}{1+k^2}$$

由于极限值随 k 的变化而变化，故重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^2}{x^2+y^2}$ 不存在．

累次极限

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}0=0$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{y^2}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}1=1$$

(2) 因为
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)=0$$
而
$$\left|\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right|\leqslant 1$$
所以重极限
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0$$
累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\sin\frac{1}{x}\left(\lim\limits_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{y}\right)\right]$不存在.

同理 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ 不存在.

(3) 令 $y=kx$,则
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^2}{k^2x^2+(1-k)^2}=\begin{cases}1, & k=1\\ 0, & k\neq 1\end{cases}$$
所以重极限不存在.

累次极限
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}0=0$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{y\to 0}0=0$$
(4) 令 $y=-x$,则
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-x}}=\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^3}{x^2-x}=0$$
又令 $y=x^3-x^2$,则
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^3-x^2}}=\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^9-3x^8+3x^7-x^6}{x^3}=1$$
所以重极限不存在.

累次极限
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=\lim_{x\to 0}x=0$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=\lim_{y\to 0}y^2=0$$
(5) 因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}y=0$,而 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$,所以重极限
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}y\sin\frac{1}{x}=0$$
累次极限
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}y\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}0=0$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}y\sin\frac{1}{x}=\lim_{y\to 0}\left[y\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\right]$$
不存在.

(6) 令 $y=x$,则
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{2x^3}=0$$
又令 $x=y^2-y$,则
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2-y}}\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2(y^4-2y^3+y^2)}{y^3+(y^6-3y^5+3y^4-y^3)}=\frac{1}{3}$$
所以重极限不存在.

累次极限
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}=\lim_{x\to 0}0=0$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}=\lim_{y\to 0}0=0$$

(7) 令 $y=x$,则
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{e^x-e^y}{\sin xy}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{\sin x^2}=0$$

又令 $x=y-y^2$,则
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y-y^2}}\frac{e^x-e^y}{\sin xy}=\lim_{y\to 0}\frac{e^y(e^{-y^2-1}-1)}{\sin(y^2-y^3)}=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2-y^3}=-1$$
所以重极限不存在.

累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^x-e^y}{\sin xy}$ 与 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^y}{\sin xy}$ 都不存在.

5、

$$\lim_{\substack{x_n\to x_0\\ y=y_0}}f(x,y)=\lim_{n\to\infty}f(x_n,y_0)=\lim_{n\to\infty}0=0\neq y_0=f(x_0,y_0)$$
而 $\forall(x_0,0)\in\mathbf{R}^2$,有
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)}f(x,y)=0=f(x_0,y_0)$$
故 $f(x,y)$ 仅在直线 $y=0$ 上连续,间断点集为$\{(x,y)\mid y\neq 0\}$.

(1) 当 $x^2+y^2=\frac{\pi}{2}+k\pi=\frac{1+2k}{2}\pi$ 时，$f(x,y)=\tan(x^2+y^2)$ 间断，故 $\tan(x^2+y^2)$ 的间断曲线为圆族

$$x^2+y^2=\frac{\pi}{2}(1+2k),\quad k=0,1,2,\cdots$$

(2) 当 $x+y=\pm n$ 时，$f(x,y)=[x+y]$ 间断，故$[x+y]$ 的间断曲线为直线族

$$x+y=\pm n,\quad n=0,1,2,\cdots$$

(3) 因为 $\forall(x_0,0)\in\mathbf{R}^2,x_0\neq0$，有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,0)}\frac{\sin xy}{y}=x_0\neq f(x_0,0)=0$$

所以间断点集为$\{(x,y)\mid x\neq0,y=0\}$.

(4) 当$(x,y)\neq(0,0)$ 时，$f(x,y)=\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 连续，当$(x,y)=(0,0)$ 时

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin xy}{xy}\cdot\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=1\cdot\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{r\to0}\frac{r^2\sin\theta\cos\theta}{r}=0=f(0,0)$$

故 $f(x,y)$ 在全平面连续.

(5) $\forall(x_0,y_0)\in\mathrm{R}^2,y_0\neq0$，有

$$f(x_0,y_0)=\begin{cases}0, & x_0\text{ 为无理数}\\ y_0 & x_0\text{ 为有理数}\end{cases}$$

ⅰ) 当 x_0 为无理数时，取有理点列$\{x_n\}$ 使 $x_n\to x_0(n\to\infty)$，则

$$\lim_{\substack{x_n\to x_0\\ y=y_0}}f(x,y)=\lim_{n\to\infty}f(x_n,y_0)=\lim_{n\to\infty}y_0=y_0\neq0=f(x_0,y_0)$$

ⅱ) 当 x_0 为有理数时，取无理点列$\{x_n\}$，使 $x_n\to x_0(n\to\infty)$，则

(6) 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,因为

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2\ln(x^2+y^2)=\lim_{r\to 0}(2r^2\ln r)(\sin^2\theta)=0=f(0,0)$$

所以 $f(x,y)$ 在全平面连续.

(7) 因为 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$ 的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x\neq k\pi, y\neq k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$$

所以 $f(x,y)$ 在 D 内连续.

(8) 因为 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}$ 的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R}, y\neq 0\}$$

所以 $f(x,y)$ 在 D 内连续.

6、

运用拉格朗日中值定理是此证明过程中关键的一步.

取 $\Delta x\neq\Delta y$,使 $x=c+\Delta x\in(a,b)$, $y=c+\Delta y\in(a,b)$,不妨设 $\Delta x<\Delta y$,由 $f(t)$ 在 (a,b) 内连续可导知 $f(t)$ 在闭区间$[c+\Delta x, c+\Delta y]$上连续,在开区间,$(c+\Delta x, c+\Delta y)$ 内可导,则由拉格朗日中值定理知,$\exists\,\xi=c+\Delta x+\theta(\Delta y-\Delta x)\in(c+\Delta x, c+\Delta y)$, $0<\theta<1$,使

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{f(c+\Delta x)-f(c+\Delta y)}{\Delta x-\Delta y}=f'(\xi)$$
$$=f'(c+\Delta x+\theta(\Delta y-\Delta x)),\quad 0<\theta<1$$

利用 $f'(t)$ 的连续性,则有

$$\lim_{(x,y)\to(c,c)} F(x,y)=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(c+\Delta x)-f(c+\Delta y)}{\Delta x-\Delta y}$$
$$=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f'(c+\Delta x+\theta(\Delta y-\Delta x))=f'(c)$$

第十六章　多元函数微分学

1、

计算多元函数的偏导数,只需用一元函数的求导公式和求导法则即可.

(1) $z_x = 2xy$,　　$z_y = x^2$;

(2) $z_x = -y\sin x$,　　$z_y = \cos x$;

(3) $z_x = \dfrac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$,　　$z_y = \dfrac{-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$;

(4) $z_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$,　　$z_y = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$;

(5) $z_x = ye^{xy}$,　　$z_y = xe^{xy}$,

(6) $z_x = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\dfrac{-y}{x^2} = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$,　　$z_y = \dfrac{x}{x^2+y^2}$;

(7) $z_x = ye^{\sin(xy)} + xy^2e^{\sin(xy)}\cos(xy) = ye^{\sin(xy)}[1+xy\cos(xy)]$,

$z_y = [1+xy\cos(xy)]xe^{\sin(xy)}$;

(8) $u_x = -\dfrac{y}{x^2}-\dfrac{1}{z}$,　$u_y = \dfrac{1}{x}-\dfrac{z}{y^2}$,　$u_z = \dfrac{1}{y}+\dfrac{x}{z^2}$;

(9) $u_x = zy(xy)^{z-1}$,　$u_y = zx(xy)^{z-1}$,　$u_z = (xy)^z\ln(xy)$;

(10) $u_x = y^z x^{y^z-1}$,　$u_y = zy^{z-1}x^{y^z}\ln x$,　$u_z = x^{y^z}y^z\ln x\ln y$.

若在 $f(x,y)$ 的表达式中将 x 换为 y,同时把 y 换为 x 时,表达式不变,则称函数 $f(x,y)$ 对 x,y 有轮换对称性.对具有轮换对称性的函数,如果已经求得 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$,则只要在 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 的表达式中将 x 换成 y,同时将 y 换成 x,就可得到 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

2、

$f(x,1) = x + 0\cdot\arcsin\sqrt{x} = x$,　$f_x(x,1) = (x)' = 1$.

3、

用偏导数的定义计算 $f_x(0,0)$,$f_y(0,0)$.

因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x} = 0$

$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\sin\dfrac{1}{(\Delta y)^2}$ 不存在.

所以,$f(x,y)$ 在原点关于 x 的偏导数为 0,关于 y 的偏导数不存在.

4、

因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2} = 0 = z(0,0)$,所以 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 连续.

又 $\dfrac{z(0+\Delta x,0)-z(0,0)}{\Delta x} = \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$,当 $\Delta x\to 0$ 时,极限不存在,因此 $z_x(0,0)$ 不存在.同理 $z_y(0,0)$ 不存在.

5、

$z=f(x,y)$ 可微 $\Leftrightarrow \Delta z-\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)=0(\rho)$.

由 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0$ 知 $f_x(0,0)=0$,同理可得 $f_y(0,0)=0$.

因此 $\left|\dfrac{\Delta f(x,y)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\rho}\right|$

$$=\left|\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}\right|$$

$$\leqslant\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{2\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{2}\to 0,\quad \rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$$

故 $\Delta f-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y=0(\rho)\quad(\rho\to 0)$

即 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

6、

因为 $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=\dfrac{|x||xy|}{x^2+y^2}\leqslant\dfrac{|x|}{2}$,所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$,即 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续.

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$$

同理
$$f_y(0,0)=0$$

$$\frac{\Delta f-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\rho}=\frac{(\Delta x)^2\Delta y}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}} \qquad ①$$

当 $\Delta x=\Delta y$ 时,① 式的值为 $\dfrac{1}{\sqrt{8}}$;当 $\Delta y=0$ 时,其值为 0.

所以 ① 式的极限不存在. 故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不可微.

7、

连续、可微、可导之间并不一定是一定等价的. 证在(0,0)处连续,即证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$;证在(0,0)处可微,则要通过 $\Delta x,\Delta y$ 来考虑.

由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$,所以 $f(x,y)$ 在点(0,0)连续.

当 $x^2+y^2=0$ 时

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{|\Delta x|}=0=f_x(0,0)$$

当 $x^2+y^2\neq 0$ 时

$$f_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}2x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 不存在(可考察 $y=0$ 情况).

因此, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)$ 不存在,从而 $f_x(x,y)$ 在点(0,0)不连续.

同理可证 $f_y(x,y)$ 在点(0,0)不连续. 然而

$$\begin{aligned}&\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta f-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\\&=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x^2+\Delta y^2}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x+\Delta y}}=0\end{aligned}$$

所以 f 在点(0,0)可微.

8、

显然函数 z 和 u 的偏导数连续，于是 z 和 u 可微，且

(1) $\mathrm{d}z = y\cos(x+y)\mathrm{d}x + (\sin(x+y) + y\cos(x+y))\mathrm{d}y$

(2) $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{yz}\mathrm{d}x + (xz\mathrm{e}^{yz} + 1)\mathrm{d}y + (xy\mathrm{e}^{yz} - \mathrm{e}^{-z})\mathrm{d}z$

9、

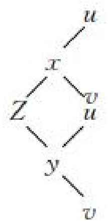
f 在可微条件下，可由公式 $\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$ 求得 f 的全微分.

(1) 因为 $z_x = 4x^3 - 8xy^2$，$z_y = 4y^3 - 8x^2y$ 在点 $(0,0)(1,1)$ 连续，所以函数在 $(0,0)(1,1)$ 可微. 由 $z_x(0,0) = 0$，$z_y(0,0) = 0$，$z_x(1,1) = -4$，$z_y(1,1) = -4$ 得，$\mathrm{d}z|_{(0,0)} = 0$，$\mathrm{d}z|_{(1,1)} = -4(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)$.

(2) 因为 $z_x = \dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$，$z_y = \dfrac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ 在点 $(1,0)$，$(0,1)$ 连续，所以函数在 $(1,0)$，$(0,1)$ 可微，由 $z_x(1,0) = 0$，$z_x(0,1) = 1$，$z_y(1,0) = 0$，$z_y(0,1) = 0$ 得，$\mathrm{d}z|_{(1,0)} = 0$，$\mathrm{d}z|_{(0,1)} = \mathrm{d}x$.

10、

(4) 变量间的结构图为



多元复合函数求导法则的关键是弄清函数的复合结构，分清哪些是中间变量，哪些是自变量，明确每次求导时是对哪一层次的变量求导. 为直观地显示变量之间的复合结构关系，我们可用结构图(也称树形图)表示出函数 z 经过中间变量通向自变量的各条路径. 对抽象函数求导时，最好设定中间变量.

(1) 令 $u = xy$，则变量间的结构图为

$$Z - u \begin{array}{l} \diagup\, x - x \\ \diagdown\, y - x \end{array}$$

由复合函数的求导法则有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{y}{1+x^2y^2} + \frac{xe^x}{1+x^2y^2} = \frac{e^x(1+x)}{1+x^2e^{2x}}$$

(2) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(x^2-y^2)}{x^2y^2}e^{\frac{x^2+y^2}{xy}} + \frac{x^2+y^2}{xy}\cdot\frac{y(x^2-y^2)}{x^2y^2}e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$$

$$= \frac{x^2-y^2}{x^2y}\left(1+\frac{x^2+y^2}{xy}\right)e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{xy^2}\left(1+\frac{x^2+y^2}{xy}\right)e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$$

(3) 变量间的结构图为

$$Z \begin{array}{l} \diagup\, x - t \\ \diagdown\, y - t \end{array}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (2x+y)2t + (x+2y) = 4t^3 + 3t^2 + 2t$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=2x\ln y\cdot\frac{1}{v}+x^2\cdot\frac{1}{y}\cdot 3$$

$$=\frac{u}{v^2}\left[2\ln(3u-2v)+\frac{3u}{3u-2v}\right]$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=-\frac{2u^2}{v^2}\left[\frac{1}{v}\ln(3u-2v)+\frac{1}{3u-2v}\right]$$

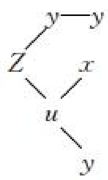
(5) 用 f_1,f_2 分别表示函数 f 对第一个中间变量$(x+y)$与第二个中间变量(xy)的偏导数.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1+f_2y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=f_1+xf_2$$

(6)
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}f_1,\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_1+\frac{1}{z}f_2,\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{2^2}f_2$$

11、把 x,y 当作是 z 的自变量,通过设 $u=x^2-y^2$ 来计算.

设 $u=x^2-y^2$,由变量间结构图则



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2xyf'(u)}{f^2(u)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{f(u)}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{f(u)}+\frac{-yf'(u)}{f^2(u)}\cdot(-2y)=\frac{f(u)+2y^2f'(u)}{f^2(u)}$$

于是

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2yf'(u)}{f^2(u)}+\frac{f(u)+2y^2f'(u)}{yf^2(u)}=\frac{1}{yf(u)}=\frac{1}{y}\cdot\frac{z}{y}=\frac{z}{y^2}$$

12、

设 $u=\sin x-\sin y$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\cos x,\frac{\partial z}{\partial y}=(1-f'(u))\cos y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\sec x+\frac{\partial z}{\partial y}\sec y=f'(u)+(1-f'(u))=1$$

13、 $F_x=f'+f'\cdot 3=4f',F_t=f'\cdot 2+f'(-2)=0$

因此 $F_x(0,0)=4f'(0),F_t(0,0)=0.$

14、

函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点$(1,1,2)$处可微.且

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,1,2)}=-1,\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(1,1,2)}=0,\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{(1,1,2)}=11$$

于是 u 沿方向 l 的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{(1,1,2)}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos 60^\circ+\frac{\partial u}{\partial y}\cos 45^\circ+\frac{\partial u}{\partial z}\cos 60^\circ=5$$

15、

因为 $u_x(0,0,0)=-4, u_y(0,0,0)=2, u_z(0,0,0)=-4, u_x\left(5,-3,\frac{2}{3}\right)=3$,

$u_y\left(5,-3,\frac{2}{3}\right)=-5, u_z\left(5,-3,\frac{2}{3}\right)=0$.

所以 $\operatorname{grad} u(0,0,0)=(-4,2,-4), \operatorname{grad} u\left(5,-3,\frac{2}{3}\right)=(3,-5,0)$

$$|\operatorname{grad} u(0,0,0)|=\sqrt{(-4)^2+2^2+(-4)^2}=6$$

$$\left|\operatorname{grad} u\left(5,-3,\frac{2}{3}\right)\right|=\sqrt{(-5)^2+3^3+0}=\sqrt{34}$$

16、

将 u_x 化为 u 对 r, r 再对 x 求导的形式是此题的关键步骤.

$u_x=u_r\cdot r_x=r\cdot\frac{-1}{r^2}\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}=\frac{a-x}{r^2}$

$u_y=\frac{b-y}{r^2},\quad u_z=\frac{c-z}{r^2}$

因此 $\operatorname{grad} u=\left(\frac{a-x}{r^2},\frac{b-y}{r^2},\frac{c-z}{r^2}\right)=-\frac{1}{r^2}(x-a,y-b,z-c)$

由 $|\operatorname{grad} u|=\frac{1}{r}$,得 $r=1$,故使 $|\operatorname{grad} u|=1$ 的点是满足方程 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1$ 的点,即在空间以 (a,b,c) 为球心,以 1 为半径的球面上都有 $|\operatorname{grad} u|=1$.

17、

计算抽象复合函数的偏导数时，要注意正确理解和使用如 f_1,f_{11},f_{12} 等这样的偏导函数记号，要明确它们本身还是多元复合函数，其复合结构与 f 的复合结构相同.

(1) $z_x=4x^3-8xy^2,z_y=4y^3-8x^2y,z_{xx}=12x^2-8y^2,z_{xy}=z_{yx}=-16xy,z_{yy}=12y^2-8x^2$

(2) $z_x=e^x(\cos y+x\sin y)+e^x\sin y=e^x(\cos y+x\sin y+\sin y)$

$z_y=e^x(x\cos y-\sin y)$

$z_{xy}=z_{yx}=e^x(x\cos y+\cos y-\sin y)$

$z_{xx}=e^x(\cos y+x\sin y+2\sin y)$

$z_{yy}=-e^x(x\sin y+\cos y)$

(3) $z_x=\ln(xy)+1=\ln x+\ln y+1,z_{xx}=\dfrac{1}{x},z_{xy}=\dfrac{1}{y}$

于是
$$z_{x^2y}=0,zxy^2=-\frac{1}{y^2}$$

(4) $u=xyze^{x+y+z}=xe^x\cdot ye^y\cdot ze^z$. 由归纳法知

$(xe^x)^{(p)}=(x+p)e^x,(ye^y)^{(q)}=(y+q)e^y,(ze^z)^{(r)}=(z+r)e^z$

因此
$$\frac{\partial^p u}{\partial x^p}=ye^y\cdot ze^z(x+p)e^x$$
$$\frac{\partial^{p+qu}}{\partial x^p\partial y^q}=ze^z(x+p)e^x\cdot(y+q)e^y$$
$$\frac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}=(x+p)e^x(y+q)e^y(z+r)e^z=(x+p)(y+q)(z+r)e^{x+y+z}$$

(5) $z_x=f'_1y^2+f'_2\cdot 2xy,z_y=f'_1\cdot 2xy+f'_2x^2$

$z_{xy}=2yf'_1+y^2(f''_{11}\cdot 2xy+f''_{12}x^2)+2xf'_2+2xy(f''_{21}\cdot 2xy+f''_{22}\cdot x^2)$

$=2yf'_1+2xf'_2+2xy(x^2f''_{22}+y^2f''_{11})+5x^2y^2f''_{12}$

$z_{xx}=f''_{11}y^2\cdot y^2+f''_{12}2xy\cdot y^2+2yf'_2+2xy(f''_{21}y^2+f''_{22}2xy)$

$=y^4f''_{11}+4xy^3f''_{12}+4x^2y^2f''_{22}+2yf''_2$

$z_{yy}=2xf'_1+4x^2y^2f''_{11}+4x^3yf''_{21}+x^4f''_{22}$

(6) 令 $x^2+y^2+z^2=t$. 则 $u=f(t)$

$u_x=2xf'(t), u_y=2yf'(t), u_z=2zf'(t)$

$u_{xx}=2f'(t)+4x^2f''(t), u_{yy}=2f'(t)+4y^2f''(t)$,

$u_{zz}=2f'(t)+4z^2f''(t), u_{xy}=4xyf''(t)$,

$u_{yz}=4yzf''(t), u_{zx}=4xyf''(t)$

(7) $z_x=f'_1+yf'_2+\frac{1}{y}f'_3$

$$z_{xx}=f''_{11}+f''_{12}y+\frac{1}{y}f''_{13}+y\left(f''_{21}+yf''_{22}+\frac{1}{y}f''_{23}\right)$$
$$+\frac{1}{y}\left(f''_{31}+yf''_{32}+\frac{1}{y}f'_{33}\right)$$
$$=f''_{11}+2yf''_{12}+\frac{2}{y}f''_{13}+y^2f''_{22}+2f''_{32}+\frac{1}{y^2}f''_{33}$$

$$z_{xy}=f''_{11}+(x+y)f''_{12}+\frac{1}{y}\left(1-\frac{x}{y}\right)f''_{13}+xyf''_{22}-\frac{x}{y^3}f''_{33}+f_2-\frac{1}{y_2}f_3$$

18、 根据复合函数连锁法先求出题中涉及的各个偏导数,然后代入微分方程加以验证.

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\sin\theta\cdot\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}=-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}$$

于是 $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

19、 因为 $\frac{\partial u}{\partial x_i}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{x_i}{r}, i=1,2,\cdots,n$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2}\cdot\frac{x_i^2}{r^2}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{r^2-x_i^2}{r^3}$$

所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{n}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}-\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$

20 先根据极值必要条件求得函数的驻点,再由极值充分条件去排除那些不是极值点的驻点,并判断出极值点是极小值点还是极大值点.

(1) 解方程组 $\begin{cases}z_x=3ay-3x^2=0\\ z_y=3ax-3y^2=0\end{cases}$ 得稳定点 $P_0(0,0), P_1(a,a)$.

由于 $A=z_{xx}(0,0)=0, B=z_{xy}(0,0)=3a, C=z_{yy}(0,0)=0, AC-B^2=-9a^2<0$

$A=z_{xx}(a,a)=-6a<0, B=z_{xy}(a,a)=3a, C=z_{yy}(a,a)=-6a, AC-B^2=27a^2>0$

所以 $(0,0)$ 不是极值点, (a,a) 为极大值点.

(2) $(1,0)$ 为极小点.

(3) 解方程组 $\begin{cases}z_x=e^{2x}(2x+2y^2+4y+1)=0\\ z_y=e^{2x}(2y+2)=0\end{cases}$ 得稳定点 $\left(\frac{1}{2},-1\right)$, 由于 $A=z_{xx}\left(\frac{1}{2},-1\right)=2e, B=z_{xy}\left(\frac{1}{2},-1\right)=0, C=z_{yy}\left(\frac{1}{2},-1\right)=2e, AC-B^2=4e^2>0$, 所以 $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ 为极小值点.

21、

(1) 先求开区域内的可疑极值点.

由 $\begin{cases} z_x = 2x = 0, \\ z_y = -2y = 0, \end{cases}$ 得稳定点(0,0).

再求边界 $x^2 + y^2 = 4$ 上的可疑极值点.

由 $\begin{cases} z = x^2 - y^2, \\ x^2 + y^2 = 4, \end{cases}$ 得 $z = 2x^2 - 4$,或 $z = 4 - 2y^2$.

由 $z_x = 2x = 0$,得 $x = 0$,这时 $y = \pm 2$,由 $z_y = -4y = 0$,得 $y = 0$,这时 $x = \pm 2$,所以边界上的稳定点为(0,2),(0,−2),(2,0),(−2,0).

又 $z(0,0) = 0$,$z(0,2) = z(0,-2) = -4$,$z(2,0) = z(-2,0) = 4$,所以函数在(2,0),(−2,0)取最大值4,在点(0,2),(0,−2)取最小值−4.

(2) 解方程组 $\begin{cases} z_x = 2x - y = 0, \\ z_y = -x + 2y = 0, \end{cases}$ 得稳定点(0,0),$z(0,0) = 0$,考察边界(边界上的最大(小)值在可疑极值点和端点之中),有

$z|_{x+y=1} = 1 - 3x(1-x)$,$z_x = -3 + 6x = 0$,得 $x = \frac{1}{2}$

这时 $y = \frac{1}{2}$,$z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$,$z(0,1) = 1$,$z(1,0) = 1$.

$z|_{x-y=1} = 1 + x(x-1)$,$z_x = 2x - 1 = 0$,得 $x = \frac{1}{2}$

这时 $y = -\frac{1}{2}$,$z\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$,$z(0,-1) = 1$.

$z|_{x+y=-1} = 1 + 3x(x+1)$,$z_x = 3(2x+1) = 0$,得 $x = -\frac{1}{2}$

这时 $y = -\frac{1}{2}$,$z\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$,$z(-1,0) = 1$.

$z|_{y-x=1} = 1 + x(x+1)$,$z_x = 2x + 1 = 0$,得 $x = -\frac{1}{2}$

这时 $y = \frac{1}{2}$,$z\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

所以函数在点(1,0),(0,1),(−1,0),(0,−1)取最大值1,在点(0,0)取最小值0.

(3) 解方程组 $\begin{cases} z_x = \cos x - \cos(x+y) = 0 & ① \\ z_y = \cos y - \cos(x+y) = 0 & ② \end{cases}$

得 $\cos x = \cos y$,因此稳定点在 $x = y$ 或 $x + y = 2\pi$ 上.

在区域内部,将 $x = y$ 代入①得

$$\cos x - \cos 2x = -2\sin\frac{3}{2}x\sin\left(-\frac{x}{2}\right) = 0$$

于是区域内部仅 $\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi\right)$ 为稳定点,$z\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. 在边界 $x = 0, 0 \leqslant y \leqslant 2\pi$;$y = 0, 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$;$x + y = 2\pi$ 上,函数值均为零,所以函数在点 $\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi\right)$ 取得最大值 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$,在边界上取得最小值零.

22、

令 $$F(x,y)=\cos x+\sin y-e^{xy}$$

因为 $$F_x=-\sin x-ye^{xy}, F_y=\cos y-xe^{xy}$$

所以 F,F_x,F_y 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续，又由于

$$F(0,0)=0, F_y(0,0)=1\neq0 (\text{但 } F_x(0,0)=0)$$

故由隐函数存在惟一性定理知，方程 $F(x,y)=0$，即 $\cos x+\sin y=e^{xy}$ 在原点的某邻域内能确定隐函数 $y=f(x)$.

23、

运用隐函数的存在惟一性定理进行证明.

令 $$F(x,y,z)=xy+z\ln y+e^{xz}-1$$

因为 $$F_x=y+ze^{xz}, F_y=x+\frac{z}{y}, F_z=\ln y+xe^{xz}$$

所以 F,F_x,F_y,F_z 在包含点 $(0,1,1)$ 的区域 $D=\{(x,y,z)\mid x\in\mathbf{R}, y>0, z\in\mathbf{R}\}$ 内连续，又由于

$$F(0,1,1)=0, F_x(0,1,1)=2\neq0, F_y(0,1,1)=1\neq0 \quad (\text{但 } F_z(0,1,1)=0)$$

故由隐函数存在惟一性定理知，方程 $F(x,y,z)=0$，即 $xy+z\ln y+e^{xz}=1$ 在点 $(0,1,1)$ 的某邻域内能确定隐函数 $x=f(y,z)$ 和 $y=g(x,z)$.

24、

(1)令 $$F(x,y)=x^2y+3x^4y^3-4$$

因为 $$F_x=2xy+12x^3y^3, F_y=x^2+9x^4y^2$$

所以 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{2y+12x^2y^3}{x+9x^3y^2} \quad (x\neq0)$$

(2)令 $$F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\frac{y}{x}$$

因为 $$F_x=\frac{x+y}{x^2+y^2}, F_y=\frac{y-x}{x^2+y^2}$$

所以 $$\frac{dy}{dx}=\frac{F_x}{F_y}=\frac{x+y}{x-y} \quad (x\neq y)$$

(3)令 $$F(x,y,z)=e^{-xy}+2z-e^z$$

因为 $$F_x=-ye^{-xy}, F_y=-xe^{-xy}, F_z=2-e^z$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{ye^{-xy}}{2-e^z}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xe^{-xy}}{2-e^z}$$

(4)在等式 $a+\sqrt{a^2-y^2}=ye^u, u=\frac{1}{a}(x+\sqrt{a^2-y^2})$ 两边分别求微分

$$-\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}dy=e^u dy+ye^u du, du=\frac{1}{a}\left(dx-\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}dy\right)$$

所以 $$-\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}dy=e^u dy+ye^u\cdot\frac{1}{a}\left(dx-\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}dy\right)$$

解出 $$\frac{dy}{dx}=\frac{-ye^u}{ay(a^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}+ae^u-y^2e^u(a^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}}$$

化简有 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

故 $$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\sqrt{a^2-y^2}\cdot\frac{dy}{dx}+y\cdot\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}\frac{dy}{dx}}{(a^2-y^2)}$$

$$=\frac{y+\frac{y^3}{a^2-y^2}}{(a^2-y^2)}=\frac{a^2y}{(a^2-y^2)^2}$$

(5)令 $$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-5$$

因为 $$F_x=2x-2, F_y=2y+2, F_z=2z-4$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{1-x}{z-2}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{y+1}{2-z}$$

(6)令 $$F(x,y,z)=z-f(x+y+z,xyz)$$

因为 $$F_x=-f'_1-yzf'_2, F_y=-f'_1-xzf'_2, F_z=1-f'_1-xyf'_2$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{f'_1+yzf'_2}{1-f'_1-xyf'_2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_x}=-\frac{f'_1+xzf'_2}{f'_1+yzf'_2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{F_z}{-F_y}=\frac{1-f'_1-xyf'_2}{f'_1+xzf'_2}$$

25、 先令 $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$，再求 $F(x,y,z)$ 的偏导数，根据公式求出 u_x, u_{xx}.

令 $$F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

因为 $$F_x=3x^2-3yz, F_y=3y^2-3xz, F_z=3z^2-3xy$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{x^2-yz}{xy-z^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\left(2x-y\frac{\partial z}{\partial x}\right)(xy-z^2)-(x^2-yz)\left(y-2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(xy-z^2)^2}$$

$$=\frac{1}{(xy-z^2)^2}\left[2x(xy-z^2)-y(x^2-yz)-y(x^2-yz)+2z\frac{(x^2-yz)^2}{xy-z^2}\right]$$

$$=\frac{1}{(xy-z^2)^3}\left[2x(xy-z^2)^2-2y(x^2-yz)(xy-z^2)+2z(x^2-yz)^2\right]$$

$$=\frac{2xz(x^3+y^3+z^3-3xyz)}{(xy-z^2)^3}=0$$

又因为 $u=x^2+y^2+z^2$，所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=u_x=2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=2x+2\frac{x^2z-yz^2}{xy-z^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u_{xx}=2+2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xz(y^3-3xyz+x^3+z^3)}{(xy-z^2)^3}$$

26、 (1)令 $$F(x,y,z)=x+y+z-e^{-(x+y+z)}$$

因为 $$F_x=1+e^{-(x+y+z)}, F_y=1+e^{-(x+y+z)}, F_z=1+e^{-(x+y+z)}$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-1, \frac{\partial z}{\partial y}=-1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

(2)令 $$G(x,y,z)=F(x,x+y,x+y+z)$$

因为 $$G_x=F'_1+F'_2+F'_3, G_y=F'_2+F'_3, G_z=F'_3$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{G_x}{G_z}=-\frac{F'_1+F'_2+F'_3}{F'_3}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{G_y}{G_z}=-\frac{F'_2+F'_3}{F'_3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{F'_3\left(\frac{\partial F'_1}{\partial x}+\frac{\partial F'_2}{\partial x}+\frac{\partial F'_3}{\partial x}\right)-(F'_1+F'_2+F'_3)\frac{\partial F'_3}{\partial x}}{(F'_3)^2}$$

$$=\frac{-1}{(F'_3)^2}\left\{F'_3\left[F''_{11}+F''_{12}+F''_{13}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right.\right.$$

$$\left.+F''_{21}+F''_{22}+F''_{23}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F''_{31}+F''_{32}+F''_{33}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]$$

$$\left.-(F'_1+F'_2+F'_3)\left[F''_{31}+F''_{32}+F''_{33}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]\right\}$$

利用 $1+\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_1+F'_2}{F'_3}$，将上式化简，有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(F'_3)^3}[(F'_3)^2(F''_{11}+2F''_{12}+F''_{22})$$
$$-2F'_3(F'_1+F'_2)(F''_{13}+F''_{23})+F''_{33}(F'_1+F'_2)^2]$$

第(2)题中需要设 $G(x,y,z)=F$，将 G_x,G_y,G_z 用 F'^1,F'_2,F'_3 表达出来，这一步是关键.

27、

要求切线需求出在(1)中 x,y,z 切点处的斜率. 分别对 t 求导后可求得切线方程；在(2)中分别对两个方程先求偏导数即可.

(1)切点为 $$\left(x\left(\frac{\pi}{4}\right),y\left(\frac{\pi}{4}\right),z\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)$$

因为 $$\frac{dx}{dt}=2a\sin t\cos t,\quad \frac{dy}{dt}=b\cos^2 t-b\sin^2 t,\quad \frac{dz}{dt}=-2c\sin t\cos t$$

所以切向量为 $$\left(x'\left(\frac{\pi}{4}\right),y'\left(\frac{\pi}{4}\right),z'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=(a,0,-c)$$

故切线方程为 $$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1,y=\frac{b}{2}$$

法平面方程为 $$a\left(x-\frac{a}{2}\right)-c\left(z-\frac{c}{2}\right)=0$$

即 $$ax-cz=\frac{1}{2}(a^2-c^2)$$

(2)设 $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-9,G(x,y,z)=z^2-3x^2-y^2$，在点 $(1,-1,2)$ 处，有

$$F_x=4,\quad F_y=-6,\quad F_z=4$$

$$G_x=-6,\quad G_y=2,\quad G_z=4$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=-32,\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}=-40,\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=-28$$

所以切向量为 $(8,10,7)$，切线方程为

$$\frac{x-1}{8}=\frac{y+1}{10}=\frac{z-2}{7}$$

法平面方程为 $$8(x-1)+10(y+1)+7(z-2)=0$$

或 $$8x+10y+7z-12=0$$

28、

平面 $x+4y+6z=0$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(1,4,6)$.

令 $$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$$

因为 $$F_x=2x,\quad F_y=4y,\quad F_z=6z$$

所以曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 (x,y,z) 处的切平面的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,2y,3z)$.

由于所求曲面的切平面平行于已知平面，所以 $\boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_2$，即有

$$\begin{cases}x^2+2y^2+3z^2=21\\ \frac{x}{1}=\frac{2y}{4}=\frac{3z}{6}\end{cases}$$

解之有 $$2x=y=z=\pm1$$

即切点为 $\left(\frac{1}{2},1,1\right)$ 或 $\left(-\frac{1}{2},-1,-1\right)$. 故所求切平面方程为

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)+4(y-1)+6(z-1)=0,\text{即 } x+4y+6z=21$$

或 $$\left(x+\frac{1}{2}\right)+4(y+1)+6(z+1)=0,\text{即 } x+4y+6z=-21$$

29、

通常先求出曲线方程对 x,y 的偏导数再代入公式得出切线方程.

令 $$F(x,y)=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}},$$

因为 $$F_x=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}},\quad F_y=\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}$$

所以曲线上任一点 $(x_0,y_0)(x_0\neq 0$ 或 $y_0\neq 0)$ 处的切线方程为

$$F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

即 $$\frac{2}{3}x_0^{-\frac{1}{3}}(x-x_0)+\frac{2}{3}y_0^{-\frac{1}{3}}(y-y_0)=0$$

或 $$xx_0^{-\frac{1}{3}}+yy_0^{-\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

分别令 $x=0$ 和 $y=0$,则得此切线在 y 轴和 x 轴上的截距分别为 $a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{2}{3}}x_0^{\frac{1}{3}}$.

切线被坐标轴所截取线段长为

$$\left[(a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{1}{3}})^2+(a^{\frac{2}{3}}x_0^{\frac{1}{3}})^2\right]^{\frac{1}{2}}=a$$

故这些切线被坐标轴所截取的线段等长.

30、 显然平面 $x+2y+z=4$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,1)$,又曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 在点 $(x(t),y(t),z(t))$ 处切线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(x'(t),y'(t),z'(t))=(1,2t,3t^2)$.

由切线应平行于平面,则 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=0$,即

$$1+4t+3t^2=0$$

解得 $$t_1=-1,t_2=-\frac{1}{3}$$

故所求切点为 $(-1,1,-1)$ 和 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27}\right)$.

31、

(1) 令 $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y-1)$

由 $$\begin{cases}L_x=2x_x+\lambda=0\\ L_y=2y+\lambda=0\\ L_\lambda=x+y-1=0\end{cases}$$

解出 $$x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2},\lambda=-1$$

又因为 $g(x)=x^2+(1-x)^2, g'(x)=2x-2(1-x), g''(x)=2+2=4$

所以 $$g''\left(\frac{1}{2}\right)=4>0$$

从而 $x=\frac{1}{2}$ 为 $g(x)$ 的极小值点，即 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 为 $f(x,y)$ 的极小值点，故 $f(x,y)$ 的极小值为 $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

(2) 令 $L(x,y,z,t,\lambda)=x+y+z+t+\lambda(xyzt-c^4)$

由
$$\begin{cases}L_x=1+\lambda yzt=0\\L_y=1+\lambda xzt=0\\L_z=1+\lambda xyt=0\\L_t=1+\lambda xyz=0\\L_\lambda=xyzt-c^4=0\end{cases}$$

解出
$$x=y=z=t=c,\lambda=-\frac{1}{c^3}$$

设条件方程 $xyzt=c^4$ 所确定的隐函数为 $t=t(x,y,z)$，记
$$F(x,y,z)=f(x,y,z,t(x,y,z))$$

因为
$$F_x=f_x+f_t t_x=1-\frac{t}{x},F_y=f_y+f_t t_y=1-\frac{t}{y}$$
$$F_z=f_z+f_t t_z=1-\frac{t}{z}$$

所以
$$F_{xx}=\frac{2t}{x^2},F_{yy}=\frac{2t}{y^2},F_{zz}=\frac{2t}{z^2},F_{xy}=\frac{t}{xy},F_{xz}=\frac{t}{xz},F_{yz}\frac{t}{yz}.$$

则 $F(x,y,z)$ 在 $P_0(c,c,c)$ 处的三阶黑赛矩阵为
$$\boldsymbol{H}_F(P_0)=\begin{bmatrix}\frac{2}{c}&\frac{1}{c}&\frac{1}{c}\\\frac{1}{c}&\frac{2}{c}&\frac{1}{c}\\\frac{1}{c}&\frac{1}{c}&\frac{2}{c}\end{bmatrix}$$

由
$$\frac{2}{c}>0,\begin{bmatrix}\frac{2}{c}&\frac{1}{c}\\\frac{1}{c}&\frac{2}{c}\end{bmatrix}=\frac{3}{c^2}>0,\begin{bmatrix}\frac{2}{c}&\frac{1}{c}&\frac{1}{c}\\\frac{1}{c}&\frac{2}{c}&\frac{1}{c}\\\frac{1}{c}&\frac{1}{c}&\frac{2}{c}\end{bmatrix}=\frac{4}{c^3}>0$$

知，三阶黑赛矩阵 $\boldsymbol{H}_F(P_0)$ 是正定的. 故 $P_1(c,c,c,c)$ 为 $f(x,y,z,t)$ 在条件 $xyzt=c^4$ 下的极小值点，其极小值为 $f(c,c,c,c)=4c$.

(3) 令 $L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)+\mu(x+y+z)=0$

则
$$\begin{cases}L_x=yz+2\lambda x+\mu=0 & ①\\L_y=xz+2\lambda y+\mu=0 & ②\\L_z=xy+2\lambda z+\mu=0 & ③\\L_\lambda=x^2+y^2+z^2-1=0 & ④\\L_\mu=x+y+z=0 & ⑤\end{cases}$$

①$\times x$+②$\times y$+③$\times z$，有

$$3xyz+2\lambda(x^2+y^2+z^2)+\mu(x+y+z)=3xyz+2\lambda=0$$

解得
$$\lambda=-\frac{3}{2}xyz$$

①+②+③,有

$$yz+xz+xy+2\lambda(x+y+z)+3\mu=yz+xz+xy+3\mu=0$$

解得
$$\mu=-\frac{1}{3}(yz+xz+xy)$$

又①-②,①-③,②-③,得方程组

$$\begin{cases}z(x-y)(1+3xy)=0 & ⑥\\ x(y-z)(1+3zy)=0 & ⑦\\ y(z-x)(1+3xz)=0 & ⑧\end{cases}$$

为了解上述方程组,下面先证明:方程⑥⑦⑧成立,当且仅当 $x-y=0,y-z=0,z-x=0$ 中只有一式成立.

若至少有两式成立,不妨设 $x-y=0,y-z=0$,则 $x=y=z$,于是由约束条件 $x+y+z=0$ 得知 $x=y=z=0$,这又与条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 相矛盾.

若都不成立,即 $x-y\neq0,y-z\neq0,z-x\neq0$,则 x,y,z 都不为零.因为若 $x=0$,则由 $x+y+z=0$ 和 $x^2+y^2+z^2=1$ 知

$$y=z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\text{或 } yz=\pm\frac{1}{2}$$

但 $x=0$ 时式⑥化为 $yz=0$,矛盾,故 x,y,z 均不为 0,于是有

$$1+3xy=0,1+3yz=0,1+3xz=0$$

即
$$xy=yz=xz=-\frac{1}{3}$$

从而 $x=y=z$,这又与 $1+3x^2=0$ 相矛盾.

综合上面的分析,要使方程组⑥⑦⑧成立,则 $x-y=0,y-z=0,z-x=0$ 中只能有一个式子成立.

现设 $x-y=0$,则 $y-z\neq0,z-x\neq0$,但

$$1+3zy=0,1+3xz=0$$

所以 $x=y,yz=xz=-\frac{1}{3}$,又由方程⑤,有

$$\begin{cases}2x+z=0\\ xz=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

解之,有
$$x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{6}},z=\mp\frac{2}{\sqrt{6}}$$

同理,有
$$x=z=\pm\frac{1}{\sqrt{6}},y=\mp\frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$y=z=\pm\frac{1}{\sqrt{6}},y=\mp\frac{2}{\sqrt{6}}$$

故得 6 个解

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right),\quad \left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right),\quad \left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\quad \left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\quad \left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

设由方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ x+y+z=0\end{cases}$ 确定隐函数 $y=y(x),z=z(x)$,则由

$$\begin{cases}2x+2yy'+2zz'=0\\ 1+y'+z'=0\end{cases}$$

有
$$y'=\frac{z-x}{y-z},z'=\frac{x-y}{y-z}$$

$$y''=\frac{(y-z)(z'-1)-(z-x)(y'-z')}{(y-z)^2}$$

$$z''=\frac{(y-z)(1-y')-(x-y)(y'-z')}{(y-z)^2}$$

又

$$f(x,y,z)=xyz$$

$$f'=yz+xy'z+xyz',f''=xy''z+xyz''+xy'z'+2y'z+2yz'$$

在 $P_1\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ 处

$$y'=-1,z'=0,f'(P_1)=0$$

$$y''\Big|_{P_1}=-\frac{2\sqrt{6}}{3},z''\Big|_{P_1}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$f''(P_1)=\frac{4}{\sqrt{6}}+\frac{2\sqrt{6}}{9}+\frac{2\sqrt{6}}{18}>0$$

所以 P_1 为极小值点，极小值为 $f(P_1)=-\frac{1}{3\sqrt{6}}$. 类似地，$P_2\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$，$P_3\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$也为极小值点，极小值

$$f(P_2)=f(P_3)=f(P_1)=-\frac{1}{3\sqrt{6}}$$

在 $P_4\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ 处

$$y'=-1,z'=0,f'(P_4)=0$$

$$y''\Big|_{P_4}=\frac{2\sqrt{6}}{3},z''\Big|_{P_4}=-\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$f''(P_4)=-\frac{4}{\sqrt{6}}-\frac{2\sqrt{6}}{9}-\frac{2\sqrt{6}}{18}<0$$

所以 P_4 为极大值点，极大值为 $f(P_4)=\frac{1}{3\sqrt{6}}$. 类似地，$P_5\left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$，$P_6\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$也为极大值点，极大值

$$f(P_5)=f(P_6)=f(P_4)=\frac{1}{3\sqrt{6}}$$

32、

两小题的方法类似，均是在已知约束条件下求最值的问题，可采用求偏导数、列方程组的方法求解.

(1)设长方体的长、宽、高分别为 x,y,z，则体积

$$V=xyz(x>0,y>0,z>0)$$

约束条件为

$$2xy+2xz+2yz=S(\text{表面积})$$

令

$$L(x,y,z)=xyz+\lambda(2xy+2xz+2yz-S)$$

由

$$\begin{cases}L_x=yz+2\lambda y+2\lambda z=0\\L_y=xz+2\lambda x+2\lambda z=0\\L_z=xy+2\lambda x+2\lambda y=0\\L_\lambda=2xy+2xz+2yz-S=0\end{cases}$$

解之，有

$$x=y=z=\sqrt{\frac{S}{6}}$$

(2)设长方体体积为V,约束条件为$xyz=v$.

$$V_{max}=\frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{6}}$$

由
$$\begin{cases}L_x=2y+2z+\lambda yz=0\\L_y=2x+2z+2\lambda xz=0\\L_z=2x+2y+\lambda xy=0\\L_\lambda=xyz-V=0\end{cases}$$

得
$$2xy+2xz=2xy+2yz$$

所以
$$x=y$$

同理有
$$y=z$$

因而
$$x=y=z=\sqrt[3]{V}$$

依题意,所求表面积最小的长方体确实存在,边长为$\sqrt[3]{V}$的正方体表面积最小.

第十七章　含参变量积分

本节中提到的定理 19.1 为含参量积分的连续性定理

1、（1）因为二元函数 $\sqrt{x^2+\alpha^2}$ 在矩形域 $R=[-1,1]\times[-k,k]$ 上连续（k 为任意正实数），由定理 19.1，函数 $\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x$ 在 $\alpha=0$ 连续.

则
$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\lim_{\alpha\to 0}\sqrt{x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}|x|\mathrm{d}x=1$$

（2）因为二元函数 $x^2\cos\alpha x$ 在矩形域 $R=[0,2]\times[-k,k]$ 上连续（k 为任意正实数），由定理 19.1，函数 $\int_0^2 x^2\cos\alpha x\mathrm{d}x$ 在 $\alpha=0$ 连续.

则
$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x\mathrm{d}x=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{3}$$

2、　用增项拆分法进行积分比较简便，得以将 x^2-y^2 分为 $\frac{x^2\cdot 2y}{2y}-\frac{y\cdot 2y}{2}$.

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y=\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{2y}\cdot\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y-\int_1^{+\infty}\frac{y}{2}\cdot\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y$$
$$=-\frac{x^2}{2y(x^2+y^2)}\bigg|_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}y}{2y^2(x^2+y^2)}+\frac{y}{2(x^2+y^2)}\bigg|_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}$$
$$=\frac{x^2}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y-\frac{1}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$
$$=\frac{x^2-1}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{x^2+1}$$

则
$$\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y=-\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}$$

同理，
$$\int_1^{+\infty}\mathrm{d}y\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x=-\int_1^{+\infty}\mathrm{d}y\int_1^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x$$
$$=-\int_1^{+\infty}\left(-\frac{1}{y^2+1}\right)\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}$$

函数 $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ 在 $R=[0,1]\times[0,1]$ 上不连续.

本题用到了凑微分法计算含参变量积分 $\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y$.

3、

利用导数定义及变上限积分的性质.

令 $I(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t(a\leqslant x\leqslant A)$，有 $I(a)=0$，且 $I'(x)=f(x)$

而
$$\int_a^x f(t+h)\mathrm{d}t=\int_{a+h}^{x+h}f(u)\mathrm{d}u=\int_{a+h}^{a}f(t)\mathrm{d}t+\int_a^{x+h}f(t)\mathrm{d}t$$
$$=I(x+h)-I(a+h)\quad(a<x<h)$$

所以
$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{I(x+h)-I(x)}{h}-\frac{I(a+h)-I(a)}{h}\right]$$
$$=I'(x)-I'(a)=f(x)-f(a)\quad(a<x<A)$$

4、

(1) 利用 M 判别法，其关键是不等式放大.(3) 注意弄清楚为何在 $[0,b]$ 上不一致收敛，在 $(0,b]$ 上一致收致.

(1) $\forall x\in(1,+\infty), y\in(-\infty,+\infty)$，有

$$\left|\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right|\leqslant\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\leqslant\frac{1}{x^2}$$

而 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ 收敛，则 $\int_1^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(2) $\forall x\in[a,b], y\in[0,+\infty](a>0)$

有 $$0<e^{-x^2y}\leqslant e^{-a^2y}$$

而 $$\int_0^{+\infty}e^{-a^2y}dy=-\frac{1}{a^2}e^{-a^2y}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{a^2}$$

则 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2y}dy$ 在 $[a,b](a>0)$ 上一致收敛.

(3) (ⅰ) $\forall x\in(a,b), y\in[0,+\infty)$，有 $0\leqslant xe^{-xy}\leqslant be^{-ay}$，

而 $\int_0^{+\infty}be^{-ay}dy$ 收敛 $(a>0)$，故 $\int_0^{+\infty}xe^{-xy}dy$ 在 $[a,b](a>0)$ 上一致收敛.

(ⅱ) 因 $\varphi(x)=\int_0^{+\infty}xe^{-xy}dy=\begin{cases}0, x=0\\1, 0<x\leqslant b\end{cases}$ 在 $x=0$ 处不连续

由连续性定理知，$\int_0^{+\infty}xe^{-xy}dy$ 在 $0\leqslant x\leqslant b$ 上不一致连续.

(4) $\forall x\in\left[\frac{1}{b},b\right](b>1), \forall y\in[0,1]$

$$|\ln xy|=|\ln x+\ln y|\leqslant|\ln x|+|\ln y|\leqslant\ln b-\ln y$$

而 $\int_0^1(\ln b-\ln y)$ 收敛，则 $\int_0^1\ln(xy)dy$ 在 $\left[\frac{1}{b},b\right](b>1)$ 上一致收敛.

(5) $\forall x\in[0,1]$，及 $y\in(-\infty,b](b<1)$，有 $\frac{1}{x^p}\leqslant\frac{1}{x^b}(b<1)$，而 $\int_0^1\frac{1}{x^b}dx$ 收敛 $(b<1)$，

故 $\int_0^1\frac{1}{x^p}dx$ 在 $(-\infty,b](b<1)$ 上一致收敛.

第十九章　曲线积分

1、

基础题型，考察第一型曲线积分的方法，很多时候要先考虑被积函数的对称性.

(1) 因为 $L = OA + AB + BO$，又

$$OA:\begin{cases} x = x, \\ y = 0, \end{cases} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$AB:\begin{cases} x = x, \\ y = 1 - x, \end{cases} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$BO:\begin{cases} x = 0, \\ y = y, \end{cases} \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$$

所以

$$\begin{aligned}\int_L (x+y)\mathrm{d}s &= \int_{OA}(x+y)\mathrm{d}s + \int_{AB}(x+y)\mathrm{d}s + \int_{BO}(x+y)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 (x+0)\sqrt{1^2+0^2}\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_0^1 (x+1-x)\sqrt{1^2+(-1)^2}\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_0^1 (0+y)\sqrt{0+1^2}\,\mathrm{d}y \\ &= 1+\sqrt{2}\end{aligned}$$

(2) 因为

$$L:\begin{cases} x = R\cos\theta, \\ y = R\sin\theta, \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

所以

$$\int_L (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s = R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-R\sin\theta)^2+(R\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta = \pi R^2$$

(3) 因为

$$L:\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = b\sin\theta, \end{cases} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

所以

$$\begin{aligned}\int_L xy\,\mathrm{d}s &= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{ab}{2(a^2-b^2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(a^2-b^2)\sin^2\theta+b^2}\,\mathrm{d}[(a^2-b^2)\sin^2\theta] \\ &= \frac{ab}{2(a^2-b^2)}\frac{2}{3}[(a^2-b^2)\sin^2\theta+b^2]^{3/2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}\end{aligned}$$

(4) 因为单位圆关于 x 轴对称，被积函数为 y 的偶函数，又上半单位圆

$$L_1:\begin{cases} x = \cos\theta, \\ y = \sin\theta, \end{cases} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$

所以

$$\int_L |y|\,\mathrm{d}s = 2\int_{L_1} y\,\mathrm{d}s = 2\int_0^{\pi} \sin\theta\sqrt{(-\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta = 4$$

(5)

$$\begin{aligned}&\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2t^2)\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+b^2}\left(a^2t+\frac{b^2}{3}t^3\right)\Big|_0^{2\pi}\end{aligned}$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(2a^2\pi+\frac{8\pi^3 b^2}{3}\right)$$

(6) $\int_L xyz\mathrm{d}s = \int_0^1 t\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}t^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}t^2\sqrt{1+2t+t^2}\mathrm{d}t$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1 t^{\frac{9}{2}}\sqrt{(1+t)^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1 (t^{\frac{9}{2}}+t^{\frac{11}{2}})\mathrm{d}t = \frac{16\sqrt{2}}{143}$$

(7) 因为
$$L:\begin{cases} y = x \\ x^2+y^2+z^2 = a^2 \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x = x, \\ y = x, \\ z = \pm\sqrt{a^2-2x^2}, \end{cases} \quad -\frac{a}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}$$

又 L 关于 xOy 平面对称，且在 L 上，$f(x,y,z) = \sqrt{2y^2+z^2} = a$，所以

$$\int_L \sqrt{2y^2+z^2}\mathrm{d}s = 2a\int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\sqrt{1+1+\left(\frac{2x}{\sqrt{a^2-2x^2}}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$= 4a\cdot\sqrt{2}a\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{a^2-2x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= 4a^2\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}x}{a}\right)\Bigg|_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} = 2\pi a^2$$

2、

(1)(i) 因为 $L = OB: y = 2x^2, 0\leqslant x\leqslant 1$，所以

$$\int_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \int_0^1 (x\cdot 4x - 2x^2)\mathrm{d}x = \int_0^1 2x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

(ii) 因为 $L = OB: y = 2x, 0\leqslant x\leqslant 1$，所以

$$\int_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \int_0^1 (2x-2x)\mathrm{d}x = 0$$

(iii) 因为 $L = OA+AB+BO$，$OA: y = 0, 0\leqslant x\leqslant 1$，$AB: x = 1, 0\leqslant y\leqslant 2$，$BO: y = 2x$，$x$ 从 1 变到 0，所以

$$\int_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \int_{OA} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x + \int_{AB} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x + \int_{BO} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 0\mathrm{d}x + \int_0^2 \mathrm{d}y + \int_1^0 (2x-2x)\mathrm{d}x = 2$$

(2) $\int_L (2a-y)\mathrm{d}x+\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}[(2a-a+a\cos t)a(1-\cos t)+a\sin t]\mathrm{d}t$

$$= \int_0^{2\pi}(a^2-a^2\cos^2 t+a\sin t)\mathrm{d}t = \pi a^2$$

(3) 因为 $L:\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \end{cases}$ $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，所以

$$\oint_L \frac{-x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}[(-a\cos\theta)(-a\sin\theta)+a\sin\theta\cdot a\cos\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\sin\theta = (\sin^2\theta)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

(4) 记 $A(\pi,0)$，因为 $L=AO+\overset{\frown}{OA}$，其中 $AO:y=0,x$ 从 π 变化到 0；$\overset{\frown}{OA}:y=\sin x,x$ 从 0 变化到 π

$$\oint_L y\mathrm{d}x+\sin x\mathrm{d}y=\int_{AO}y\mathrm{d}x+\sin x\mathrm{d}y+\int_{\overset{\frown}{OA}}y\mathrm{d}x+\sin x\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{\pi}^{0}0\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}(\sin x+\sin x\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=\left[-\cos x+\frac{1}{2}\sin^2 x\right]\Big|_0^{\pi}=2$$

(5) 因为 $L:x=1+t,y=1+2t,z=1+3t,0\leqslant t\leqslant 1$，所以

$$\int_L x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z=\int_0^1[(1+t)+2(1+2t)+3(1+3t)]\mathrm{d}t=13$$

3、

因为 $L:\rho=\rho(\theta)$，则由直角坐标与极坐标之间变换公式，有

$$L:\begin{cases}x=\rho\cos\theta=\rho(\theta)\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta=\rho(\theta)\sin\theta,\end{cases}\quad \theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2$$

$$\sqrt{(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2}=\sqrt{(\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta)^2+(\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta)^2}$$

$$=\sqrt{\rho'^2(\theta)+\rho^2(\theta)}$$

所以
$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{\theta_1}^{\theta_2}f(\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho'^2(\theta)+\rho^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$$

(1) $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^a\sqrt{0+a^2}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4}ae^a$

(2) 因为对数螺线 $\rho=ae^{k\theta}(k>0)$ 在圆 $r=a$ 内的部分为 $\rho=ae^{k\theta}$，$(-\infty<\theta\leqslant 0)$，又

$$\sqrt{\rho'^2+\rho^2}=a\sqrt{1+k^2}e^{k\theta}$$

所以

$$\int_L x\mathrm{d}s=\int_{-\infty}^{0}ae^{k\theta}\cos\theta\cdot a\sqrt{1+k^2}e^{k\theta}\mathrm{d}\theta=a^2\sqrt{1+k^2}\int_{-\infty}^{0}e^{2k\theta}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=a^2\sqrt{1+k^2}\left[\frac{e^{2k\theta}}{1+4k^2}(2k\cos\theta+\sin\theta)\right]\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{4ka^2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$$

4、

此题用到物理知识点：功 = 作用力 · 力距，通过极坐标变换求解.

因为
$$L:\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=b\sin\theta,\end{cases}\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

当 $(x,y)\in L$ 时，力

$$\boldsymbol{F}=k\sqrt{x^2+y^2}(\cos\theta\cdot\boldsymbol{i}+\sin\theta\cdot\boldsymbol{j})=k\sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{i}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{j}\right)$$

$$=k(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})\text{（}k\text{ 为比例系数）}$$

所以功

$$W=\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_L x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[a\cos\theta(-a\sin\theta)+b\sin\theta(b\cos\theta)]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}k(b^2-a^2)\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{k(b^2-a^2)}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{k(b^2-a^2)}{2}$$

5、

(1) 由 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\y=z\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x^2+2y^2=1\\y=z\end{cases}$

得 L 的参数方程

$$L:\begin{cases}x=\cos\theta\\y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\\z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\end{cases}\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

当 θ 从 0 变到 2π 时,点 (x,y,z) 的变动方向与曲线的指向一致,故

$$\int_L xyz\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sin^2\theta\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{16\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{2}\pi}{16}$$

(2) 记 $A(1,0,0),B(0,1,0),C(0,0,1),L=\widehat{AB}+\widehat{BC}+\widehat{CA}$,其中

$$\widehat{AB}:\begin{cases}x=\cos\theta\\y=\sin\theta\\z=0\end{cases}\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

$$\widehat{BC}:\begin{cases}x=0\\y=\cos\theta\\z=\sin\theta\end{cases}\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

$$\widehat{CA}:\begin{cases}x=\sin\theta\\y=0\\z=\cos\theta\end{cases}\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

由图形的对称性以及被积函数中变量的轮换对称性,知

$$\int_L(y^2-z^2)\mathrm{d}x=\int_L(z^2-x^2)\mathrm{d}y=\int_L(x^2-y^2)\mathrm{d}z$$

故

$$\int_L(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$$

$$=3\int_L(y^2-z^2)\mathrm{d}x$$

$$=3\int_{\widehat{AB}}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+3\int_{\widehat{BC}}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+3\int_{\widehat{CA}}(y^2-z^2)\mathrm{d}x$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta(-\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta+0+3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos^2\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=-6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta=-6\times\frac{2}{3}\times 1=-4$$

6、

(1) 由 $\begin{cases}y^2=x\\x+y=2\end{cases}$

得交点:$A(1,1)$ 和 $B(4,-2)$.

由 B 点经抛物线 $y^2=x$ 到 A 点的弧记为 L_1,由 A 点经直线 $x+y=2$ 到 B 点的直线段记为 L_2,则

$$L_1:\begin{cases}x=t^2\\y=t\end{cases}\quad -2\leqslant t\leqslant 1$$

$$L_2:\begin{cases}x=t\\y=2-t\end{cases}\quad 1\leqslant t\leqslant 4$$

故有 $\displaystyle\int_L y\mathrm{d}s=\int_{L_1}y\mathrm{d}s+\int_{L_2}y\mathrm{d}s$

$$=\int_{-2}^{1}t\sqrt{4t^2+1}\mathrm{d}t+\int_1^4(2-t)\sqrt{1+(-1)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}(4t^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]\bigg|_{-2}^{1}+\sqrt{2}\left(2t-\frac{1}{2}t^2\right)\bigg|_1^4$$

$$=\frac{1}{12}[5\sqrt{5}-17\sqrt{17}]-\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

(2) 因为 L 的极坐标方程为

$$\rho^2=a^2\cos 2\theta,\ |\theta|\leqslant\frac{\pi}{4}\text{ 及 }|\theta-\pi|\leqslant\frac{\pi}{4}$$

所以 $\displaystyle\mathrm{d}s=\sqrt{\rho'^2(\theta)+\rho^2(\theta)}\mathrm{d}\theta=\sqrt{\frac{a^2\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}+a^2\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{\rho}\mathrm{d}\theta$

由对称性,有

$$\int_L|y|\mathrm{d}s=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho(\theta)\sin\theta\frac{a^2}{\rho(\theta)}\mathrm{d}\theta=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\mathrm{d}\theta=4a^2\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(3) $\displaystyle\int_L z\mathrm{d}s=\int_0^{t_0}t\sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1}\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{t_0}t\sqrt{2+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{3}[(2+t_0)^{\frac{2}{3}}-2\sqrt{2}]$$

(4) 因为 $L:\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=a\sin\theta\end{cases}$ θ 从 $\frac{\pi}{2}$ 变到 $-\frac{\pi}{2}$,所以

$$\int_L xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}[a^4\sin^2\theta\cos^2\theta+a^4\sin^2\theta\cos^2\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$=-4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=-a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\theta)\mathrm{d}\theta=-\frac{\pi}{4}a^4$$

(5) 因为 $L:\begin{cases}x=x\\y=x^2-4\end{cases}$ $0\leqslant x\leqslant 2$,所以

$$\int_L\frac{\mathrm{d}y-\mathrm{d}x}{x-y}=\int_0^2\frac{2x-1}{4+x-x^2}\mathrm{d}x=\ln 2$$

(6) 将 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 表示为 $\rho^2=a^2$,$x^2+y^2=ax$ 表示为 $r^2=ax$ 或 $r=\sqrt{ax}$.

令 $x=a\cos^2\theta$,则

$$y=a\sin\theta\cos\theta,\quad z=a\sqrt{1-\cos^2\theta}=a|\sin\theta|$$

于是
$$L:\begin{cases}x=a\cos^2\theta\\ y=a\sin\theta\cos\theta\\ z=a\sqrt{1-\cos^2\theta}\end{cases}\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

所以
$$\begin{aligned}\int_L y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z=&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[a^2\sin^2\theta\cos^2\theta(-2a\cos\theta\sin\theta)\\&+a^2(1-\cos^2\theta)\cdot a(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\&+a^2\cos^4\theta\cdot a\cos\theta\sin\theta(1-\cos^2\theta)^{-\frac{1}{2}}]\mathrm{d}\theta\\=&2a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta\cos^2\theta-\sin^4\theta)\mathrm{d}\theta\\=&a^3\left[\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)-\mathrm{B}\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)\right]=-\frac{\pi}{4}a^3\end{aligned}$$

7、

(1) 设$\widehat{AB}$为光滑线(若分段光滑就分段积分),且
$$\widehat{AB}:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

则
$$\int_{\widehat{AB}}f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$$

由已知条件知 $f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}>0$

故由定积分的性质,有
$$\int_{\widehat{AB}}f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t>0$$

(2) 在与(1)相同条件下,$\int_{\widehat{AB}}f(x,y)\mathrm{d}x>0$一般不能成立.这是因为第二型曲线积分与曲线的方向有关.

例:取
$$f(x,y)=x^2+y^2$$
$$L_1:\begin{cases}x=1\\ y=y\end{cases}\quad 0\leqslant y\leqslant 1,L_2:\begin{cases}x=x\\ y=1\end{cases}\quad x\text{ 从 }1\text{ 变到 }0$$

在 L_1 上, $f(1,x)=1+y^2>0$

在 L_2 上, $f(x,1)=x^2+1>0$

但
$$\int_{L_1}f(x,y)\mathrm{d}x=0$$
$$\int_{L_2}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_1^0(1+x^2)\mathrm{d}x=-\frac{4}{3}<0$$

此题意在说明在相同条件下,第一、二型曲线积分也会得出不同结论,主要是由于第二型曲线积分的方法性导致的.

第十九章　二重积分

1、

必须正确画出区域 D 的图形.

积分区域 D 如图 21－1.

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^x f(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}y\int_y^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

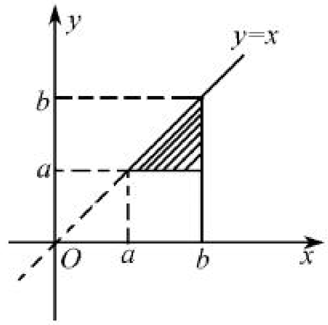


图 21－1

(2) 积分区域 D 如图 21－2.

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$$

(3) 积分区域如图 21－3.

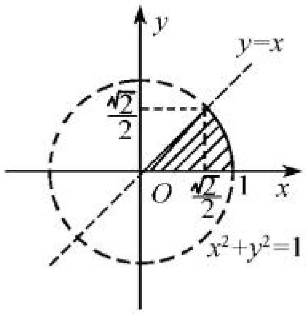


图 21－2

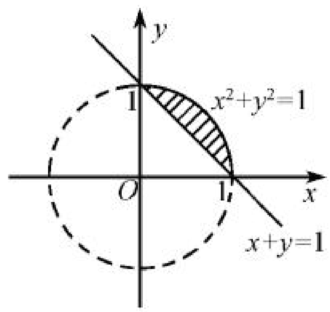


图 21－3

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$$

(4) 积分区域如图 21－4.

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^0 \mathrm{d}x\int_{-(1+x)}^{1+x} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x-1}^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^0 \mathrm{d}y\int_{-(1+y)}^{1+y} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{y-1}^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x$$

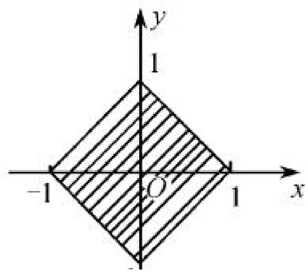


图 21-4

2、

由所给累次积分，正确画出积分区域图形.

由已知，积分区域如图 21－5.

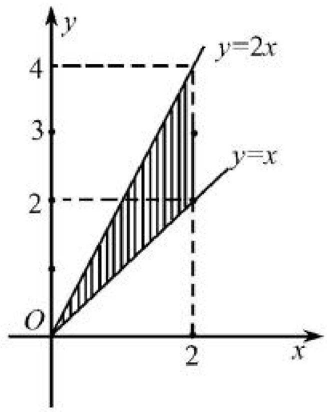


图 21－5

$$\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^{2x} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_2^4 \mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x$$

(2) 由已知，积分区域如图 21－6.

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-1}^{0} \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\mathrm{d}x$$

(3) 由已知，积分区域如图 21－7.

$$\int_0^{2a} \mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{a} \mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_0^{a} \mathrm{d}y\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_a^{2a} \mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)\mathrm{d}x$$

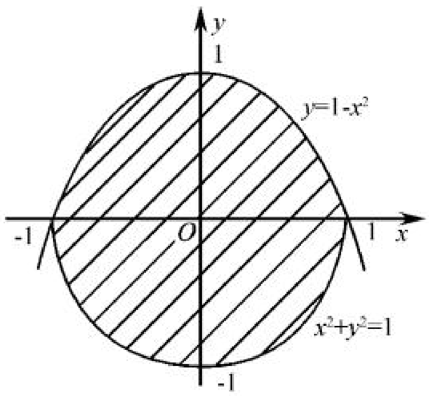


图 21－6

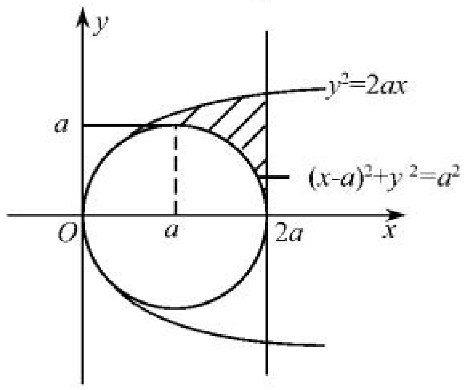


图 21－7

(4) 由已知,积分区域如图 21－8.

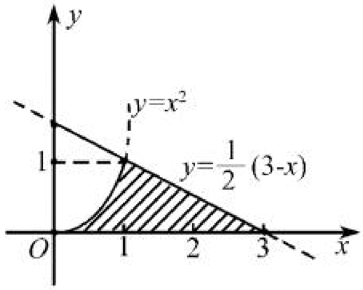


图 21－8

$$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^3 dx\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx$$

3、

(1) $\iint\limits_D xy^2 dxdy=\int_{-p}^{p} y^2 dy\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} x dx=\frac{1}{2}\int_{-p}^{p} y^2\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{2p}\right)^2\right]dy=\frac{p^5}{21}$

(2) $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(x^2+y^2)dy=\int_0^1 (x^{\frac{5}{2}}+\frac{7}{3}x^{\frac{3}{2}})dx=\frac{128}{105}$

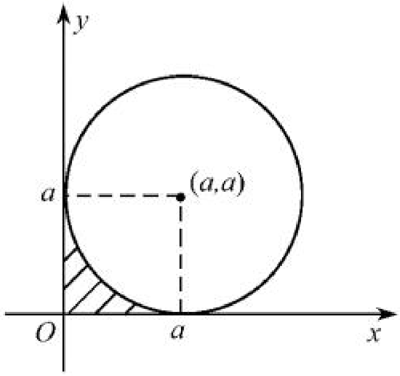


图 21－9

(3) $\iint\limits_D \frac{d\sigma}{\sqrt{2a-x}}=\int_0^a dx\int_0^{a-\sqrt{a^2-(x-a)^2}}\frac{1}{\sqrt{2a-x}}dy$

$=\int_0^a\left(\frac{a}{\sqrt{2a-x}}-\sqrt{x}\right)dx=\left(2\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)a^{\frac{3}{2}}$

(4) $\iint\limits_D \sqrt{x}dxdy=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x-a^2}}^{\sqrt{x-a^2}}\sqrt{x}dy=2\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx=\frac{8}{15}$

4、

(1) 令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$ 将 D 变换成极坐标平面下区域 $D'=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\pi\leqslant r\leqslant 2\pi\}$

则 $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\pi}^{2\pi} r\sin r dr=-4\pi^2$

(2) 令$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$,将 D 变换成极坐标平面下区域

$$D' = \left\{(r,\theta) \mid -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{3}{4}\pi, 0 \leqslant r \leqslant \sin\theta + \cos\theta\right\}$$

则$\iint\limits_{D}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} r(\cos\theta + \sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{\cos\theta+\sin\theta} r^2(\sin\theta + \cos\theta)\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (\cos\theta + \sin\theta)^4 \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\sin 2\theta - \frac{1}{2}\cos 4\theta\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}$$

(3) 令$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$将 D 变换成极坐标平面下区域 $D' = \{(r,\theta) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant a\}$,

则$\iint\limits_{D} |xy| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} |r\cos\theta \cdot r\sin\theta| \cdot r \cdot \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\iint\limits_{D'} |\sin 2\theta| r^3 \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} |\sin 2\theta| \mathrm{d}\theta \cdot \int_{0}^{a} r^3 \mathrm{d}r = \frac{a^4}{2}$$

(4) 令$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$ 将 D 变换成极坐标平面下区域

$$D' = \{(r,\theta) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant R\}$$

则 $\iint\limits_{D} f'(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} f'(r^2) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_{0}^{R} rf'(r^2)\mathrm{d}r = \pi[f(R^2) - f(0)]$

5、

(1) 首先应画出曲线 L 的图形,并求出直线 AB、BC、CA 的方程.

(2) 运用格林公式时,首先应是封闭路线,因此需补一直线段 OA.

(1) 如图 21－11 所示.

AB 的方程:$y = \frac{1}{2}(x+1)(1 \leqslant x \leqslant 3)$

BC 的方程:$y = -3x + 11(2 \leqslant x \leqslant 3)$

CA 的方程:$y = 4(x-3)(1 \leqslant x \leqslant 2)$

$$P = (x+y)^2, Q = (x^2+y^2), \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -4x - 2y$$

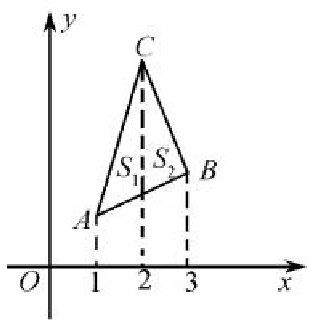


图 21－11

则三角形域 S 被分成两部分 S_1 和 S_2.

则原式 $= \iint\limits_{S}(-4x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \iint\limits_{S_1}(-4x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{S_2}(-4x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{4x-3}(-4x-2y)\mathrm{d}y + \int_{2}^{3}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{-3x+1}(-4x-2y)\mathrm{d}y = -46\frac{2}{3}$$

(2) 连接点 $O(0,0)$ 与点 $A(a,0)$，构成封闭路线 $\widehat{AOA}$，在线段 OA 上，$y=0$，$\mathrm{d}y=0$. 于是

$$\int_{OA}(e^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(e^x\cos y-m)\mathrm{d}y=0$$

而

$$\oint_{\widehat{AOA}}=\int_{\widehat{AO}}+\int_{OA}=\int_{\widehat{AO}}+\int_{AB}$$

由格林公式

$$\oint_{\widehat{AOA}}(e^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(e^x\cos y-m)\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D:x^2+y^2\leqslant ax} m\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{m\pi a^2}{8}$$

因此原式 $=\dfrac{m\pi}{8}a^2$.

6、

(1) 如图 21－12，利用图形的对称性可知

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\mathrm{d}t=\frac{3a^2}{8}\pi$$

(2) 如图 21－13，令 $x=r(\theta)\cos\theta$，$y=r(\theta)\sin\theta$

可得

$$x=a\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta},\ y=a\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}$$

利用图形的对称性

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\theta\mathrm{d}\theta=a^2$$

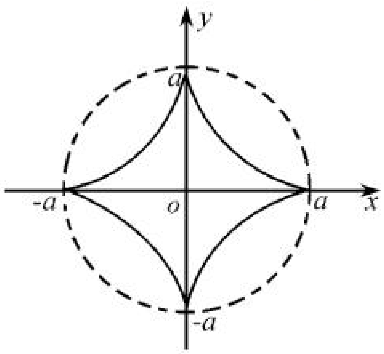


图 21－12

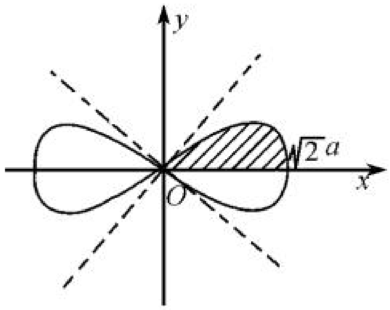


图 21－13

7、 (1)

$$P(x,y)=x-y,Q(x,y)=-x+y$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=-1,\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-1$，则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

故积分与路径无关.

取路线 $y=x$，有 $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x-y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)=\int_{(0,0)}^{(1,1)}0(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)=0$.

(2)

$$P=2x\cos y-y^2\sin x,Q=2y\cos x-x^2\sin y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2x\sin y-2y\sin x,\frac{\partial Q}{\partial x}=-2\sin x-2x\sin y$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，则积分与路线无关，取 $(0,0)$ 到 (x,y) 折线

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2x\cos y-y^2\sin x)\mathrm{d}x+2(y\cos x-x^2\sin y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{(0,0)}^{(x,0)}2x\mathrm{d}x+\int_{(x,0)}^{(x,y)}(2y\cos x-x^2\sin y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x 2x\mathrm{d}x+\int_0^y(2y\cos x-x^2\sin y)\mathrm{d}=x^2\cos x+y^2\cos y$$

(3) $$P=\frac{y}{x^2}, Q=-\frac{1}{x}, \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{x^2}$$

积分与路线无关，且

$$\int_{(2,1)}^{(1,2)}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2}=\int_{(2,1)}^{(1,2)}\mathrm{d}\left(-\frac{y}{x}\right)=-\frac{y}{x}\Big|_{(2,1)}^{(1,2)}=-\frac{3}{2}$$

(4) 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$\mathrm{d}(\sqrt{x^2+y^2})=\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 是全微分.

故积分与路线无关.

$$原式=\int_{(1,0)}^{(6,8)}\mathrm{d}(\sqrt{x^2+y^2})=\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{(1,0)}^{(6,8)}=9$$

(5) 因 $\varphi(x)$，$\psi(y)$ 为连续函数

则 $$F(x)=\int_2^x\varphi(u)\mathrm{d}u 与 G(y)=\int_1^y\psi(r)\mathrm{d}r$$

分别是 $\varphi(x)$ 和 $\psi(y)$ 的原函数. 于是

$$\mathrm{d}[F(x)+G(y)]=\mathrm{d}F(x)+\mathrm{d}G(y)=\varphi(x)\mathrm{d}x+\psi(y)\mathrm{d}y$$

故积分与路线无关. 则

$$\int_{(2,1)}^{(1,2)}\varphi(x)\mathrm{d}x+\psi(y)\mathrm{d}y=[F(x)+G(y)]\Big|_{(2,1)}^{(1,2)}$$

$$=F(1)+G(2)-F(2)-G(1)=\int_2^1\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_1^2\psi(y)\mathrm{d}y$$

“积分与路线无关”有四个等价条件，应根据不同的题目灵活运用.

8、

设曲面面积为 S，由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{a}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{a}$，则

$S=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{a}\right)^2+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D:x^2+y^2\leqslant a^2$. 由广义极坐标变换，得

$$S=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 a^2r\sqrt{1+r^2}\mathrm{d}r=a^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sqrt{1+r^2}\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2}-1)a^2$$

9、

解此类题目的关键是正确求出曲面在 xOy 平面的投影区域.

曲面在 xOy 平面上的投影区域 $D:x^2+y^2\leqslant 2x$，而 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

则 $S=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\pi$.

10、

(2) 考虑到图形的对称性，且密度均匀，即可得到重心的横坐标为零.

(1) 设重心坐标为$(\bar{x},\bar{y})$，由对称性 $\bar{x}=0$

$$\bar{y}=\frac{\iint\limits_D \rho y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{2}{ab\pi}\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{ab\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 ab^2r^2\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{4b}{3\pi}$$

则重心为$\left(0,\frac{4b}{3\pi}\right)$.

(2) 设重心坐标为$(\bar{x},\bar{y})$，由对称性 $\bar{x}=0$

$$\bar{y}=\frac{\iint\limits_D \rho y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{2}{(a+b)h}\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{(a+b)h}\int_0^h y\mathrm{d}y\int_{L_1^{-1}(y)}^{L_2^{-1}(y)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{(a+b)h}\int_0^h\left[\frac{a-b}{h}(y-h)+a\right]y\mathrm{d}y=\frac{2b+a}{3(a+b)}h$$