第一章 多项式

一. 1-5 BACCB　6-10. CBBCA　11-12. CD

二. 1. 有理数域　2. 数域　3. m ~~4 35~~ 5.　4. $x^3+4x^2+8x+15$　35　5. $(g(x),h(x))=1$

6. $u(x)\cdot f(x)+v(x)\cdot g(x)=1$　7. 6　-8　8. 0或-2　9. $(x-1)^2(x+1)$　10. 不可约　11. 不可约

12. x^2+x-1　$-5x+7$

三. 1-5 ×√×××　6-9 ×√√×

四. 1.

$$
\begin{array}{r|l|l}
x^2-x+2 & x^4+2x+5 & x^2+x-1 \\
 & x^4-x^3+2x^2 & \\
\hline
 & x^3-2x^2+2x+5 & \\
 & x^3-x^2+2x & \\
\hline
 & -x^2+5 & \\
 & -x^2+x+2 & \\
\hline
 & -x+3 &
\end{array}
$$

$f(x)=q(x)\cdot g(x)+r(x)$

$q(x)=x^2+x-1$　$r(x)=-x+3$

2. 所有可能的有理根 $\frac{r}{s}$ $\frac{\text{常数项因数}}{\text{最高次因数}}=\pm1\ \pm\frac{1}{3}$

方法1: 直接代入 $f(1)=0$, $f(-1)\neq0$, $f(\frac{1}{3})=0$, $f(-\frac{1}{3})\neq0$

$\therefore$ 1, $\frac{1}{3}$ 为有理根

方法2: 使用综合除法试根

例: $x=1$ 即因式 $(x-1)$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
1 & 3 & -7 & 8 & -8 & 5 & -1 \\
 & & 3 & -4 & 4 & -4 & 1 \\
\hline
 & 3 & -4 & 4 & -4 & 1 & \underline{0}
\end{array}
$$

余式为0, 即为因式, 即为根

注: 若需判断重根, 可考虑原式与微商的公因式.

3. 辗转相除法

$$
\begin{array}{r|l|l|l}
 & g(x) & f(x) & \\
q_2(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4} & x^3+x^2-x-1 & x^4+x^3-3x^2-4x-1 & x=q_1(x) \\
 & x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x & x^4+x^3-x^2-x & \\
\hline
 & -\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1 & r_1(x)=-2x^2-3x-1 & \frac{8}{3}x+\frac{4}{3}=q_3(x) \\
 & -\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4} & -2x^2-2x & \\
\hline
 & r_2(x)=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4} & -x-1 & \\
 & & -x-1 & \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}
$$

被除　商　除　余

① $f(x)=q_1(x)\cdot g(x)+r_1(x)$

② $g(x)=q_2(x)\cdot r_1(x)+r_2(x)$

③ $r_1(x)=q_3(x)\cdot r_2(x)$

$\therefore d(x)=-\frac{4}{3}r_2(x)$

$=x+1$

(一般取首项系数为1)

~~③代入②，得 $g(x)=q_2(x)\cdot q_3(x)\cdot r_2(x)+r_2(x)$~~

~~②③代入①，得 $f(x)=q_1\cdot[q_2\cdot q_3\cdot r_2+r_2]+q_3r_2$~~

②式：$r_2(x)=g(x)-q_2(x)\cdot r_1(x)$

①式：$r_1(x)=f(x)-q_1(x)\cdot g(x)$

①代入②，得 $r_2(x)=g(x)-q_2(x)\cdot[f(x)-q_1(x)\cdot g(x)]$

$$=\underbrace{-q_2(x)}_{\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}}\cdot f(x)+\underbrace{[q_1(x)\cdot q_2(x)+1]}_{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x+1}\cdot g(x)$$

$\because d(x)=-\frac{4}{3}r_2(x)$　$\therefore u(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$

$v(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$

4. $\because g_1(x)g_2(x)\mid f_1(x)f_2(x)$，$f_1(x)\mid g_1(x)$

$\therefore \exists h_1(x), h_2(x)$，有 $f_1(x)\cdot f_2(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)\cdot h_1(x)$ ①　，$g_1(x)=f_1(x)\cdot h_2(x)$ ②

~~$f_1(x)=g_1(x)\cdot h_2(x)$ ②~~

②代入① $\cancel{f_1(x)}\cdot f_2(x)=\cancel{f_1(x)}\cdot h_2(x)\cdot g_2(x)\cdot h_1(x)$　$(\because f_1(x)\neq 0)$

$f_2(x)=g_2(x)\cdot h_2(x)\cdot h_1(x)$

$\therefore g_2(x)\mid f_2(x)$ 结论得证

5. (1) $\because (f(x), g(x)) = 1$

$\therefore \exists\, u(x), v(x)$, 使 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$

$\cancel{u(x)f(x) + v(x)g(x) + v(x)f(x)}$

$u(x)\cdot f(x) + v(x)\cdot g(x) + v(x)f(x) - v(x)f(x) = 1$

$[u(x) - v(x)]\, f(x) + v(x)\, [g(x) + f(x)] = 1$

$\therefore (f(x), f(x)+g(x)) = 1$

(2) 同理可证 $(g(x), f(x)+g(x)) = 1$

下面我们只需证明如下结论:

若 $(f(x), g(x)) = 1$, $(f(x), h(x)) = 1$, 则 $(f(x), g(x)h(x)) = 1$ (小结论)

$\exists\, u_1(x)f(x) + v_1(x)g(x) = 1$ ①

$u_2(x)f(x) + v_2(x)h(x) = 1$ ②

①×②, 得 $[u_1(x)u_2(x)f(x) + u_1(x)v_2(x)h(x) + u_2(x)v_1(x)g(x)]\, f(x) + [v_1(x)v_2(x)]\, g(x)h(x) = 1$

$\therefore (f(x), g(x)h(x)) = 1$, 得证

$\therefore (f(x), f(x)+g(x)) = 1$ $(g(x), f(x)+g(x)) = 1$ 根据上述结论.

$\therefore (f(x)g(x), f(x)+g(x)) = 1$, 结论得证

第二章 行列式

一. 1.正 2.$k^n d$ 3.5 4.$a \neq -2$且$a \neq 1$ 5.d 6.3 7.0 8.0 9.9

10.$(a-b)^3$ 11.32 12.8 13.$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ 4 14.16 15.0 16.4 17.1

二. 1-5 BCCDA 6-10 BACBB 11-15. BACCC

三. 1-2 ✓✓

第三章 矩阵

一. 1. -32 2. A 3. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 33 & -31 \\ -31 & 33 \end{bmatrix}$ 4. $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ 5. 3 6. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 31 & 32 \end{bmatrix}$ 7. -1 8. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 10. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 11. $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 3 \end{bmatrix}$ 12. $A^{-1}CB^{-1}$ 13. $a \neq 1$ 且 $a \neq -2$ 14. 18

15. 2 16. 3^n 17. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 18. $A^{-1}(A^2-E)^{-1}$

二. 1-5 CDCDA 6-7. BA

第四章 向量组与线性方程组

一. 1-4 DDCC

二. 1. 3 2. 0或1

三. 1-3 ✓✓✗

四. 1. $B=(A|b)=\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & b \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{一系列初等}} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-2a \end{array}\right]$ 行阶梯形矩阵

$a=1,b=3$时,方程组有无穷多解 $r(A)=r(B)=2<4$

代入 $a=1,b=3$ $\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 最简行阶梯

①代回到对应齐次

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

令 x_3,x_4,x_5 为自由未知量

解得 $\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 + 5x_5 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 \end{cases}$

得 $\xi_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\xi_2=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\xi_3=\begin{bmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

②代回到对应非齐次

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 - 5x_5 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \end{cases}$$

令 $x_3=x_4=x_5=0$ 得

特解 $\eta=\begin{bmatrix}-2\\3\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

$\therefore X = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 + \eta$

(k_1,k_2,k_3 为任意常数)

2. 存在非零向量 α 使 $A\alpha=0$,即齐方程组有非0解

即 $|A|=0$ (克拉默法则)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & \lambda+4 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix} = -15-(-5)(\lambda+4)=0$$

即 $\lambda=-1$

3. 线性方程组解空间维数=基础解系中包含向量个数=自由未知量个数

∴系数矩阵秩=2 (未知量−自由未知量=4−2=2)

$$\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\1&a&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\0&a-2&-1&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\0&0&-(a-1)^2&-(a-1)^2\end{bmatrix}$$

$a=1$时, $r(A)=2$

$$\xrightarrow[a=1]{\text{代入}}\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

代回到方程组 $\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2+x_3+x_4=0\end{cases}$

令x_3, x_4为自由未知量

$x_3=1, x_4=0$ $\quad$ $x_3=0, x_4=1$ $\quad$ $\therefore X=k_1\xi_1+k_2\xi_2$

解得 $\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=-x_3-x_4\end{cases}$ $\quad \xi_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}$ $\quad \xi_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$ $\quad$ (k_1,k_2为∀常数)

4. $$\begin{bmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}a&0&0&-a\\0&a&0&-a\\0&0&a&-a\\1&2&3&4+a\end{bmatrix}$$

① $$\xrightarrow{\text{若}a\neq0}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\1&2&3&4+a\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&a+10\end{bmatrix}$$

$a=-10$时, 线性相关 $\rightarrow$ $$\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4\end{matrix}\end{array}$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为一个极大线性无关组

且 $\alpha_4=-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$

② $$\xrightarrow{\text{若}a=0}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4\end{matrix}\end{array}$$

$a=0$时, 线性相关

α_1为一个极大线性无关组

且 $\alpha_2=2\alpha_1$,

$\alpha_3=3\alpha_1$

$\alpha_4=4\alpha_1$

5. $B=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a-1 & 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & a & a \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{时}]{a\neq 1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & a & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 & a \end{bmatrix}$

$\therefore a=-3$ 时, $r(A)=3$, $r(B)=4$, $r(A)\neq r(B)$ 无解

$\xrightarrow[\text{时}]{a=1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$r(A)=r(B)=1<4$, 无穷解

①代回对应齐次

$x_1+x_2+x_3+x_4=0$

$x_1=-x_2-x_3-x_4$

令 x_2, x_3, x_4 为自由按量

$\xi_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\xi_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\xi_3=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

②代回对应非齐

$x_1+x_2+x_3+x_4=1$

令 $x_2=x_3=x_4=0$, 得

$\eta=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\therefore X=k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3+\eta$

(k_1, k_2, k_3 为 $\forall$ 常数)

$a\neq 1$ 且 $a\neq -3$ 时, 唯一解

6. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & a-3 & 0 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & a-2 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & -2 & a-3 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5-2a & 3-2a & b-a+2 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right]$

① $a\neq 1$ 且 $a\neq \frac{5}{2}$ 时, 唯一解

② $a=1$ 时, 无穷解：(1)代回对应齐次

$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-\frac{2}{3}x_4 \\ x_3=-\frac{1}{3}x_4 \end{cases}$

x_4 为自由按量

$\xi_1=\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

(2)代回对应非齐

$\eta_1=\begin{bmatrix} \frac{b-2}{3} \\ \frac{1-2b}{3} \\ \frac{b+1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$ (与 b 有关)

$X=k_1\xi_1+\eta_1$

③ $a=\frac{5}{2}$ 时, $\begin{cases} ③(1)\ b=\frac{1}{2} \text{ 无穷解} \\ ③(2)\ b\neq\frac{1}{2} \text{ 无解} \end{cases}$

$b=\frac{1}{2}$ 时, $\xi_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\eta_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$X=k_2\xi_2+\eta_2$

第五章 二次型

一. 1. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 2. n 3. -2 4. $\begin{bmatrix} 2 & -t & 1 \\ -t & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 5. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$ 6. -2

7. $f=y_1^2+y_2^2$ 8. $f=y_1^2-y_2^2-y_3^2$

二. 1-5 BDBCC 6-10 ADDAD 11-12 AD

三. 1. 方法一：配方法

$$f=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

$$=x_1^2+4x_1(x_2-x_3)+4(x_2-x_3)^2-4(x_2-x_3)^2+2x_2^2+3x_3^2-8x_2x_3$$

$$=(x_1+2x_2-2x_3)^2-2x_2^2-x_3^2$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1+2x_2-2x_3 \\ y_2=x_2 \\ y_3=x_3 \end{cases}$ 所做非退化线性替换 $\begin{cases} x_1=y_1-2y_2+2y_3 \\ x_2=y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$

得标准型：$f=y_1^2-2y_2^2-y_3^2$ 正惯性指数为1，不定的（也可直接判断顺序主子式）

~~用矩阵表示~~ $\cancel{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}$ 用矩阵表示 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

方法二：合同变换

$$\begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B \\ \cdots \\ C \end{bmatrix}$$

∴ C为所做非退化线性替换的矩阵

B为标准型对应的矩阵.

2. 两种方法：① 二次型化为标准型判断正惯性指数 $\begin{cases} ① 配方法 \\ ② 合同变换（常用） \end{cases}$

② 顺序主子式 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$ $P_1=2$ $P_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3$ $P_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix}=t\cdot(4-1)$
$=3t>0$

∴ $t>0$ 时，A是正定的.

3.
(1) $\begin{bmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1-a & 2 & 0\\ 1+a & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1-a & 2 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

∵二次型的秩与矩阵秩相同
∴显然 $a=0$ 时，一、二行呈比例，秩为2

(2) $a=0$ 时

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ \hline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$\therefore C=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

即所对应的非退化的线性替换为 $\begin{cases}x_1=y_1-y_3\\ x_2=y_3\\ x_3=y_2\end{cases}$ 对应标准型为 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+2y_2^2$

注：配方法也可.

4.

$$\begin{bmatrix}A\\ \hline E\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & -\frac{1}{2} & 1\\ 1 & \frac{3}{2} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 1 & \frac{3}{2} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & 4\\ 1 & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & \frac{1}{2} & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 4\\ 1 & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & \frac{1}{2} & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \sqrt{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1\end{bmatrix}$$

$\therefore C=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \sqrt{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

即所对应的非退化的线性替换为 $\begin{cases}x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}y_1+\frac{\sqrt{2}}{2}y_2+\frac{1}{2}y_3\\ x_2=\sqrt{2}y_2+\frac{3}{2}y_3\\ x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}y_1+\frac{\sqrt{2}}{2}y_2+y_3\end{cases}$，对应~~标准型~~规范型为 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-y_2^2+y_3^2$

注：为简化合同变换过程，我们可连续作n次行变换，再作n次列变换.

5. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -a & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & a-1 & a-1 \\ 0 & a-1 & 1-a^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & a-1 \\ 0 & a-1 & 1-a^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & a-1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -(a+2)(a-1) \end{bmatrix}$

$\because$ 正负惯性指数都是1

$\therefore \begin{cases} a-1 \neq 0 \\ a+2=0 \end{cases}$ $\therefore a=-2$

第六章 线性空间

一. 1-5 × √ √ √ √　6-8 √ √ √

二. 1. 2　1, i　2. 6　3. n

三. 1-6. A D A C D B

四. 1. $\begin{bmatrix}2&4&-1&1\\1&5&1&5\\3&3&-3&-3\\-1&-1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&-1&1&1\\1&5&1&5\\3&3&-3&-3\\2&4&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&-1&1&1\\0&4&2&6\\0&0&0&0\\0&2&1&3\end{bmatrix}\to\begin{array}{c}\begin{bmatrix}-1&-1&1&1\\0&2&1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\\ \alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4\end{array}$

$\therefore L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的基为 α_1,α_2, $\dim L=2$

注：与求向量组的极大无关组方法类似

2. $\begin{bmatrix}1&1&1&2\\1&2&2&4\\0&3&1&2\\-1&4&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&1&1&2\\0&3&1&2\\0&5&2&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&1&1&2\\0&0&-2&-4\\0&0&-3&-6\end{bmatrix}\to\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&1&1&2\\0&0&-2&-4\\0&0&0&0\end{bmatrix}\\ \cancel{\alpha_1}\quad\cancel{\alpha_2}\quad\cancel{\alpha_3}\quad\cancel{\alpha_4}\\ \beta_1\quad\beta_2\quad\beta_3\quad\beta_4\end{array}$

$\therefore L(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$ 的基为 β_1,β_2,β_3, $\dim L=3$

五. 1. 先证 W_1 是 P^n 的子空间

$\because A$ 为 $n\times n$, X 为 $n\times 1$

$\therefore A_{n\times n}\cdot X_{n\times 1}=Y_{n\times 1}\in P^n$

显然 W_1 是非空的，$\therefore W_1$ 是 P^n 的非空子集.（条件1）

下面我们证 W_1 对加法与数乘封闭

设 $\forall AX_1, AX_2\in W_1$（其中 $X_1, X_2\in P^n$）

① 加法 $AX_1+AX_2=A(X_1+X_2)$

$\because X_1+X_2\in P^n$　$\therefore A(X_1+X_2)\in W_1$ 对加法封闭

② 数乘 $kAX_1=A(kX_1)$

$\because kX_1\in P^n$　$\therefore A(kX_1)\in W_1$ 对数乘封闭（条件2）

$\therefore W_1$ 是 P^n 的子空间

证 W_2 是 P^n 的子空间

显然 W_2 是 P^n 的非空子集（条件1）

下面我们证 W_2 对加法与数乘封闭 ~~条件~~

设 $\forall X_1, X_2 \in W_2$

①加法：$\because AX_1 + AX_2 = 0$

$\therefore A(X_1+X_2)=0$ 且 $X_1+X_2 \in P^n$

$\therefore X_1+X_2 \in W_2$，对加法封闭

②数乘：$\because kAX_1 = 0$

$\therefore A(kX_1)=0$ 且 $kX_1 \in P^n$

$\therefore kX_1 \in W_2$，对数乘封闭（条件2）

$\therefore W_2$ 是 P^n 的子空间，得证

---

2. 显然 W 是 $R^{2\times2}$ 的非空子集合

下面我们证明 W 对加法与数乘封闭

设 $\forall A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ $A_2 = \begin{bmatrix} a_1' & a_2' \\ a_3' & a_4' \end{bmatrix}$

①加法：$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} a_1+a_1' & a_2+a_2' \\ a_3+a_3' & a_4+a_4' \end{bmatrix}$

~~$\because a+a' \in R$ $\ldots A_1+A_2$~~

$\because a_1+a_1'+a_2+a_2'+a_3+a_3'+a_4+a_4'$

$=(a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_1'+a_2'+a_3'+a_4')$

$=0$

$\therefore A_1+A_2 \in W$，对加法封闭

②数乘：$kA_1 = \begin{bmatrix} ka_1 & ka_2 \\ ka_3 & ka_4 \end{bmatrix}$

$\because ka_1+ka_2+ka_3+ka_4$

$=k(a_1+a_2+a_3+a_4)=0$

$\therefore kA_1 \in W$，对~~加法~~数乘封闭

$\therefore W$ 是 $R^{2\times2}$ 的线性子空间，得证

$a_1+a_2+a_3+a_4=0$

即 $a_1=-a_2-a_3-a_4$ 其中 a_2, a_3, a_4 为自由未知量

$\therefore W$ 的维数为3（方程组解空间维数＝自由未知量个数）

分别令 a_2, a_3, a_4 为1，得一组基

$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

而 $W = L(A_1, A_2, A_3)$

3.设 $W=\{B \mid AB=BA\}$

(1) ∵ B 为 2×2 矩阵

∴ W 显然是 $P^{2\times2}$ 的一个非空子集

下面我们证明 W 对加法与数乘封闭.

对于 $\forall B_1, B_2 \in W$

① 加法: ∵ $AB_1=B_1A$, $AB_2=B_2A$

$$\therefore A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2 = B_1A+B_2A = (B_1+B_2)A$$

∴ $B_1+B_2\in W$, 对加法封闭

② 数乘: ∵ $AB_1=B_1A$

$$\therefore A\cdot(kB_1)=kA\cdot B_1 = (kB_1)\cdot A$$

∴ $kB_1\in W$, 对数乘封闭

∴ W 是 $P^{2\times2}$ 的一个线性子空间, 得证.

(2) 设 $B=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+3x_3 & x_2+3x_4 \\ 2x_3 & 2x_4 \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 & 3x_1+2x_2 \\ x_3 & 3x_3+2x_4 \end{bmatrix}$$

∵ $AB=BA$

$$\therefore \begin{cases} x_1+3x_3=x_1 \\ x_2+3x_4=3x_1+2x_2 \\ 2x_3=x_3 \\ 2x_4=3x_3+2x_4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=-3x_1+3x_4 \\ x_3=0 \end{cases}$$

两个自由未知量 x_1, x_4 ∴ W 的维数为 2

分别令 x_1, x_4 为 1, 得

$$B_1=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

B_1, B_2 为 W 的一组基

(3) ~~$W=L(B_1,B_2)$ 或~~ $W=k_1B_1+k_2B_2$

(k_1, k_2 为 $\forall$ 常数)

4. 设 $C(A)=\{B \mid AB=BA\}$

(1) 证明方法与上题基本一致，此处不再缀述.

(2) 当 $A=E$ 时，对于 $\forall B_{n\times n}\in P^{n\times n}$，恒有 $AB=BA$

$\therefore C(A)$ 即为 $P^{n\times n}$

(3) 设 $B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$

BA [redacted] $=\begin{bmatrix} a_{11} & 2a_{12} & \cdots & na_{1n} \\ a_{21} & 2a_{22} & \cdots & na_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 2a_{n2} & \cdots & na_{nn} \end{bmatrix}$ AB [redacted] $=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & \cdots & 2a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ na_{n1} & na_{n2} & \cdots & na_{nn} \end{bmatrix}$

可通过
左乘行变换
右乘列变换
快速判断

$\because AB=BA$

$\therefore$ 有 $\begin{cases} a_{11}=a_{11} \\ 2a_{12}=a_{12} \\ 2a_{21}=a_{21} \\ 2a_{22}=2a_{22} \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{ij}=0 \quad (i\neq j) \\ a_{ij} \text{ 为自由未知量 } (i=j) \end{cases}$

$n\times n$ 个方程

$\therefore a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \cdots a_{nn}$ 为自由未知量，$\dim C(A)=n$

分别令 $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots a_{nn}$ 为 1，得

$B_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ $B_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ $\cdots$ $B_n=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

$C(A)=L(B_1, B_2, \cdots B_n)$

第2章 线性变换

一. 1-5 √√√√× 6-10 ×√√√× 11-12 ××

二. 1. 2,3,5 2. 4 3. $-\frac{1}{2}$ 4. E 5. 3,7,8 6. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 7. 0或1 8. 1或-1

三. 1-5 BCCDB 6-7 AC

四. 1.
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

特征多项式 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -3 & -3 \\ -3 & \lambda-1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-7)(\lambda+2)^2=0$ (注: $|A-\lambda E|=0$ 也可)

∴ A的特征值为 7 (单重) 和 -2 (二重)

① 把 $\lambda_1=7$ 代入对应齐次线性方程组
$$\begin{cases} 6x_1-3x_2-3x_3=0 \\ -3x_1+6x_2-3x_3=0 \\ -3x_1-3x_2+6x_3=0 \end{cases}$$
得基础解系: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 即为特征值7的特征向量

② 把 $\lambda_2=-2$ 代入对应齐次线性方程组
$$\begin{cases} -3x_1-3x_2-3x_3=0 \\ -3x_1-3x_2-3x_3=0 \\ -3x_1-3x_2-3x_3=0 \end{cases}$$
得基础解系: $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (注: 齐次线性方程组解法详见第四章)

即为-2的特征向量.

∵ A有3个线性无关的特征向量 ∴ A矩阵可对角化, 且 $T=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 使 $B=T^{-1}AT$

其中 $B=\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

2. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

特征多项式 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -1 \\ 2 & \lambda+3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2=0$

∴ A的特征值为 2 (单重) 和 -1 (二重)

①把$\lambda_1=2$代入对应齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2-x_3=0 \\ 2x_1+5x_2=0 \\ \end{cases}$$
得基础解系$\begin{bmatrix}5\\-2\\9\end{bmatrix}$，即为特征值2的特征向量

②$\lambda_2=-1$代入对应齐次线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1-2x_2-x_3=0 \\ 2x_1+2x_2=0 \\ -3x_3=0 \end{cases}$$
得基础解系$\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，即为特征值-1的特征向量.

$\because A$只有2个线性无关的特征向量 $\therefore A$不能对角化.

3. $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\-1&1&-1\end{bmatrix}$

特征多项式$=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-1\\-2&\lambda+2&-2\\1&-1&\lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+2)=0$

$\therefore A$(或线性变σ)的特征值为 0(二重)和 -2(单重)

①把$\lambda_1=0$代入对应方程

$$\begin{cases} -x_1+x_2-x_3=0 \\ -2x_1+2x_2-2x_3=0 \\ x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$$
得基础解系：$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ ~~即为A的特征向量(0的)~~ 为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$在变换$\sigma$下到两个线性无关的特征向量(0的)坐标

即$\cancel{0}$的特征向量为 $\xi_1=\alpha_1+\alpha_2$，全部的特征向量为$k_1\xi_1+k_2\xi_2$ $(k\in P)$
$\xi_2=-\alpha_1+\alpha_3$

②把$\lambda_2=-2$代入对应方程

$$\begin{cases} -3x_1+x_2-x_3=0 \\ -2x_1+(-2)x_3=0 \\ x_1-x_2-x_3=0 \end{cases}$$
得基础解系：$\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix}$ 为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$在变换$\sigma$下到-2的一个特征向量的坐标

即-2的特征向量为 $\xi_3=-\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$，全部特征向量为$k_3\xi_3$ $(k\in P)$

$\because \sigma$是3个线性无关的特征向量，且维数为3 $\therefore \sigma$在基ξ_1,ξ_2,ξ_3下可对角化，且$T=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&0&-2\\0&1&1\end{bmatrix}$

对角化后的矩阵为$B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$.

4. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 1\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1)=0$$

$\therefore$ A的特征值为 0（二重）或 1（单重）

① 把0代入对应方程

$\left\{-x_1-2x_2+x_3=0\right.$ 得基础解系 $\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ 为0的特征向量

② 把1代入对应方程

$\begin{cases}-2x_2+x_3=0\\ x_2=0\\ x_3=0\end{cases}$ 得基础解系 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ 为1的特征向量.

$\because$ A有3个线性无关的特征向量 $\therefore$ A可对角化，且 $P=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$，使 $B=P^{-1}AP$

则 $B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

5.

第八章 欧几里德空间

一. 1. 0　2. 3　3. 6　4. 0, $\sqrt{2}$　5. A', 1　6. -1　7. 正交　8. $\frac{\pi}{3}$

二. 1-5 ××√×√　6-10 √√×√√　11-12 ××

三. 1-5 CBC$\underline{CD}$A　6-8 ABA

四 1. $A=\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{bmatrix}$

特征多项式 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&2&0\\2&\lambda-1&2\\0&2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2)=0$

∴特征值为 1, +4, −2 (均为单重)

代入1, 得对应方程

$$\begin{cases}-x_1+2x_2=0\\2x_1+2x_3=0\\2x_2+x_3=0\end{cases}$$

得基础解系 $\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}$

代入4, 得对应方程

$$\begin{cases}2x_1+2x_2=0\\2x_1+3x_2+2x_3=0\\2x_2+4x_3=0\end{cases}$$

得基础解系 $\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$

代入−2, 得对应方程

$$\begin{cases}-4x_1+2x_2=0\\2x_1-3x_2+2x_3=0\\2x_2-2x_3=0\end{cases}$$

得基础解系 $\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$

将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 通过施密特正交化方法, 分别进行单位正交化.

(注: ∵ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 来自不同的特征值

∴它们本身就是正交的, 我们只需单位化)

∴ $\eta_1=\frac{1}{|\alpha_1|}\alpha_1=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$　$\eta_2=\frac{1}{|\alpha_2|}\alpha_2=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

$\eta_3=\frac{1}{|\alpha_3|}\alpha_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$　∴ $T=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$

注: ($T^{-1}=T'$) 正交矩阵

2. (1) 方法一: 全部的顺序主子式 >0

$A=\begin{bmatrix}t&1&1\\1&t&-1\\1&-1&t\end{bmatrix}$　$P_1=t>0$　$P_2=\begin{vmatrix}t&1\\1&t\end{vmatrix}>0$　$P_3=\begin{vmatrix}t&1&1\\1&t&-1\\1&-1&t\end{vmatrix}=(t+1)^2\cdot(t-2)>0$

$=t^2-1>0$

$=(t+1)(t-1)>0$

∴综上所述, $t>2$

方法2: 将二次型化为标准型判断正惯性指数 (有难度慎用, 详见第五章)

(2)
$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&1\\-1&1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+1)=0$$

∴特征值为 2（二重），-1（单重）

代入2，得对应方程
$$\begin{cases}x_1-x_2-x_3=0\\-x_1+x_2+x_3=0\\-x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$$
得基础解系 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

代入-1，得对应方程
$$\begin{cases}-2x_1-x_2-x_3=0\\-x_1-2x_2+x_3=0\\-x_1+x_2-2x_3=0\end{cases}$$
得基础解系 $\alpha_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$

将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$通过施密特正交化方法，分别进行单位正交化.

（注：α_1,α_2为一组，α_3为一组）

先正交化：$\beta_1=\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$

$\beta_3=\alpha_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$

再单位化：$\eta_1=\dfrac{1}{|\beta_1|}\beta_1=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\\0\end{bmatrix}$　$\eta_2=\dfrac{1}{|\beta_2|}\beta_2=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt6}{6}\\-\frac{\sqrt6}{6}\\\frac{\sqrt6}{3}\end{bmatrix}$　$\eta_3=\dfrac{1}{|\beta_3|}\cdot\beta_3=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt3}{3}\end{bmatrix}$

∴正交的线性替换的矩阵$T=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt6}{6}&-\frac{\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt3}{3}\\0&\frac{\sqrt6}{3}&\frac{\sqrt3}{3}\end{bmatrix}$，使得$B=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$

3. $A=\begin{bmatrix}2&b&0\\b&a&2\\0&2&3\end{bmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-b&0\\-b&\lambda-a&-2\\0&-2&\lambda-3\end{vmatrix}$$
分别将1，2，5代入$|\lambda E-A|$中，使$|\lambda E-A|=0$.

即$|E-A|=0$，$|2E-A|=0$，$|5E-A|=0$，解得

$a=3$，$b=0$

$\therefore A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{bmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-3&-2\\0&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5)=0$$

特征值为 1(单重), 2(单重), 5(单重)

将1代入对应方程

$\begin{cases}-x_1=0\\-2x_2-2x_3=0\\-2x_2-2x_3=0\end{cases}$ 得基础解系 $\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$

将2代入对应方程

$\begin{cases}-x_2-2x_3=0\\-2x_2-x_3=0\end{cases}$ 得基础解系 $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

将5代入对应方程

$\begin{cases}3x_1=0\\2x_2-2x_3=0\\-2x_2+2x_3=0\end{cases}$ 得基础解系 $\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$分别进行单位正交化.

(注:因其为不同的特征值, ∴只需单位化)

$\eta_1=\frac{1}{|\alpha_1|}\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$ $\eta_2=\frac{1}{|\alpha_2|}\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

$\eta_3=\frac{1}{|\alpha_3|}\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$ $\therefore T=\begin{bmatrix}0&1&0\\-\frac{\sqrt2}{2}&0&\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}&0&\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$

使 $B=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{bmatrix}$

---

4. $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)\cdot\lambda^2=0$$

特征值 0(二重), 3(单重) 且均A的特征值, 也为A的特征值.

将0代入对应方程

$\begin{cases}-x_1-x_2-x_3=0\\-x_1-x_2-x_3=0\\-x_1-x_2-x_3=0\end{cases}$ 得基础解系 $\alpha_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

α_1,α_2为0的特征向量

将3代入对应方程

$\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=0\\-x_1+2x_2-x_3=0\\-x_1-x_2+2x_2=0\end{cases}$ 得基础解系 $\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

α_3为3的特征向量

将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$分别正交单位化.($\alpha_1,\alpha_2$一组, α_3一组)

正交化: $\beta_1=\alpha_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ $\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\cdot\beta_1=\begin{bmatrix}-\frac12\\-\frac12\\1\end{bmatrix}$

$\beta_3=\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

单位化 $\eta_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\\0\end{bmatrix}$ $\eta_2=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt6}{6}\\-\frac{\sqrt6}{6}\\\frac{\sqrt6}{3}\end{bmatrix}$

$\eta_3=\frac{1}{|\beta_3|}\beta_2=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt3}{3}\end{bmatrix}$ $T=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt3}{3}\\0&\frac{\sqrt6}{3}&\frac{\sqrt3}{3}\end{bmatrix}$

A中0的特征向量 $\begin{cases}\xi_1=-\varepsilon_1+\varepsilon_2\\\xi_2=-\varepsilon_1+\varepsilon_3\end{cases}$ ∴0的全部特征向量为$k_1\xi_1+k_2\xi_2$, 同理3的特征向量$\xi_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, 全部为$k_3\xi_3$

五. 1. 首先证明充分性:

$\because |\alpha|=|\beta|$

$\therefore (\alpha,\alpha)=(\beta,\beta)$ ①

又 $\because (\beta,\alpha)=(\alpha,\beta)$ ② 内积可交换

①+②, 得 $(\alpha,\alpha)+(\beta,\alpha)=(\beta,\beta)+(\alpha,\beta)$

$(\alpha+\beta,\alpha)=(\alpha+\beta,\beta)$ 内积分配律

$\therefore (\alpha+\beta,\alpha)$[redacted]$-(\alpha+\beta,\beta)=0$

$\therefore (\alpha+\beta,\alpha-\beta)=0$ $\therefore$ 充分性得证.

下面我们证明必要性:

$(\alpha+\beta,\alpha-\beta)=0$

$(\alpha+\beta,\alpha)-(\alpha+\beta,\beta)=0$ 分配律

$(\alpha+\beta,\alpha)=(\alpha+\beta,\beta)$

$(\alpha,\alpha)+\cancel{(\beta,\alpha)}=\cancel{(\alpha,\beta)}+(\beta,\beta)$

$(\alpha,\alpha)=(\beta,\beta)$

$\therefore |\alpha|=|\beta|$ $\therefore$ 必要性得证, 结论得证.

2. 设 $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$ 为A的n个特征值

必然∃n阶[redacted]正交矩阵U, 使 $U^{-1}AU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$ 为对角形, 对角线上为A的特征值

(实对称矩阵重要定理)

我们令 $(U^{-1}AU)^{2k+1}=\underbrace{\cancel{U^{-1}AU\cdot U^{-1}AU\cdot U^{-1}AU\cdots U^{-1}}AU}_{2k+1\text{个}U^{-1}AU}$

$=U^{-1}A^{2k+1}U$

$=U^{-1}EU$

$=E$

我们用矩阵表示 $\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}^{2k+1}=\begin{bmatrix}\lambda_1^{2k+1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2^{2k+1} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^{2k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$

$\therefore U^{-1}AU=E$, 结论得证