第一章 多项式

一. 1. 用 x^2+mx-1 除 x^3+px+q 得余式 $r(x)=(p+m^2+1)x+(q-m)$

$\because$ 整除 $\therefore r(x)=0$，即 $\begin{cases} p+m^2+1=0 \\ q-m=0 \end{cases}$

2. 综合除法

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
-3 & 2 & 0 & -5 & 0 & -8 & 0 \\
 & + & -6 & 18 & -39 & 117 & -327 \\
\hline
 & 2 & -6 & 13 & -39 & 109 & -327
\end{array}
$$

$\therefore q(x)=2x^4-6x^3+13x^2-39x+109$，$r(x)=-327$

3. 逐次进行综合除法

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & + & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & + & 1 & 2 & 3 & 4 & \\
\hline
1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\
 & + & 1 & 3 & 6 & & \\
\hline
1 & 1 & 3 & 6 & 10 & & \\
 & + & 1 & 4 & & & \\
\hline
1 & 1 & 4 & 10 & & & \\
 & + & 1 & & & & \\
\hline
 & 1 & 5 & & & &
\end{array}
$$

$\therefore x^5=(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1$

4. 辗转相除

$q_1(x)=1$，$r_1(x)=x^3-2x$

$q_2(x)=x+1$，$r_2(x)=x^2-2$

$q_3(x)=x$，$r_3(x)=0$

$\therefore (f(x),g(x))=r_2(x)=x^2-2$

$u(x)=-q_2(x)=-x-1$，$v(x)=1+q_1(x)q_2(x)=x+2$

5. $f'(x)=5x^4-20x^3+21x^2-4x+4$

$f(x)$的重因式即为$f(x)$与其微商的最大公因式，重数为公因式次数+1.

$(f(x),f'(x))=(x-2)^2$

$\therefore f(x)$有重因式 $x-2$（三重）

6. 可能的有理根为 $\pm\frac{r}{s}=\pm1,\pm2,\pm7,\pm14$.

分别代入或用综合除法试根，发现只有2为有理根，即

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -6 & 15 & -14 \\ & + & 2 & -8 & 14 \\ \hline 2 & 1 & -4 & 7 & 0 \\ & + & 2 & -4 & \\ \hline & 1 & -2 & 3\neq0 & \end{array}$$

（第二次目的：验证是否为重根）

$\therefore$ 2为单根

$\therefore f(x)=(x-2)(x^2-4x+7)$

第二章. 行列式

一. 1. $(-1)^{n-1}C$ 2. $(-1)^{n}C$

二. 1-3 AAB

三. 1. $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

2. 0

3. 160 (把第2,3,4行加到第1行)

4. $(x-1)(x-2)(x-3)=0$

$x_1=1,\ x_2=2\ ,x_3=3$

5. $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$

范德蒙得行列式.

第三章 矩阵

一. 1-4 BACA

二. 1. (1) $\begin{bmatrix} \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{bmatrix}$

2. $X=\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ -15 & -3 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}$

3. $A^{-1}BA=6A+BA$ 右乘A^{-1}

$A^{-1}B=6E+B$

$(A^{-1}-E)B=6E$

其中 $A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ $|A^{-1}-E|\neq 0$ $\therefore A^{-1}-E$ 可逆

$B=6(A^{-1}-E)^{-1}=\begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

三. 1. 先证明充分性：$\because A^T=A, B^T=B$，且 $AB=BA$

$\therefore (AB)^T=(BA)^T=A^TB^T=AB$

$\therefore AB$ 是对称矩阵

再证明必要性：$\because A^T=A, B^T=B$ 且 $(AB)^T=AB$

$\therefore AB=(AB)^T=B^TA^T=BA$

结论得证.

2. ① $R(A)=n$，$|A|\neq 0$ $\therefore |AA^*|=\big||A|E\big|=|A|^n\neq 0$

$\therefore |A^*|\neq 0$ $\therefore R(A^*)=n$

② $R(A)=n-1$ 时，$|A|=0$，有 $AA^*=|A|E=0$

即 A^* 的每一列都是方程组 $Ax=0$ 的解

$\because R(A)=n-1$ $\therefore Ax=0$ 的基础解系只有一个向量，即秩为1

$\therefore R(A^*)=1$

③ $R(A)\leq n-2$ 时，A 中每个元素的代数余子式都为0，即 $A^*=0$

$\therefore R(A^*)=0$

第四章

一. 1-6 DDDBAD

二. 1.(1) 证 $\eta^*, \xi_1, \xi_2 \cdots \xi_{n-r}$ 线性无关

即证: $k\eta^* + k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$ 成立

当且仅当 $k = k_1 = k_2 \cdots = k_{n-r} = 0$，下面我们证明上述结论

$\therefore A(k\eta^* + k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}) = 0$ （A为方程的系数矩阵）

$kA\eta^* + k_1A\xi_1 + \cdots + k_{n-r}A\xi_{n-r} = 0$

$\because \xi_1, \xi_2 \cdots \xi_{n-r}$ 为 $Ax=0$ 的基础解系

$\therefore A\xi_1 = A\xi_2 = A\xi_3 = A\xi_{n-r} = 0$

且 $kA\eta^* = 0$ 但 $A\eta^* = b \neq 0$

$\therefore k = 0$

又 $\because \xi_1, \xi_2, \cdots \xi_{n-r}$ 线性无关

$\therefore k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0$

$\therefore \eta^*, \xi_1, \xi_2 \cdots \xi_{n-r}$ 线性无关，结论得证

(2) 证: $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \eta^* + \xi_2, \cdots, \eta^* + \xi_{n-r}$ 线性无关

即证: $k\eta^* + k_1(\eta^* + \xi_1) + \cdots + k_{n-r}(\eta^* + \xi_{n-r}) = 0$ 成立

当且仅当 $k = k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r}$，下面我们证明上述结论.

$\because k\eta^* + k_1(\eta^* + \xi_1) + \cdots + k_{n-r}(\eta^* + \xi_{n-r}) = 0$

$(k + k_1 + \cdots + k_{n-r})\eta^* + k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$

由(1)可知，$\eta^*, \xi_1, \cdots \xi_{n-r}$ 线性无关

$\therefore k + k_1 + \cdots + k_{n-r} = 0$，即 $k = 0$

$\therefore \eta^*, \eta^* + \xi_1, \cdots \eta^* + \xi_{n-r}$ 线性无关，结论得证

2. $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$

$\therefore \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 2(\beta_1 + \beta_3) = 2(\beta_2 + \beta_4)$

即 $(\beta_1 + \beta_3) = (\beta_2 + \beta_4)$

$\therefore \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_4 = 0$

$\because k_2$ 不全为0 $\therefore \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性相关，结论得证.

3. 设 $\exists$ 一组数 $k_1, k_2, \cdots k_r$，使

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_r\beta_r=0$$

下面我们证明，当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$ 时，上式成立.

把 $\beta_i=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_i$ 代入上式，得

$$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+k_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+\cdots+k_r(\alpha_1+\cdots+\alpha_r)=0$$

$$(k_1+k_2+\cdots+k_r)\alpha_1+(k_2+\cdots+k_r)\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$$

$\because \alpha_1 \cdots \alpha_r$ 线性无关

$\therefore \begin{cases} k_1+k_2+\cdots+k_r=0 \\ k_2+k_3+\cdots+k_r=0 \\ k_r=0 \end{cases}$ $\therefore$ 仅有0解，即 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$

$\therefore \beta_1, \beta_2 \cdots \beta_r$ 线性无关，结论得证

三. 1. (1) 方程组 I 的通解为 $x=\eta+k\xi$（k 为任常数）

其中 $k\xi$ 为齐次通解 $\xi=\begin{bmatrix}1\\1\\2\\1\end{bmatrix}$，$\eta$ 为非齐特解 $\eta=\begin{bmatrix}-2\\-4\\-5\\0\end{bmatrix}$

(2) 方程组 II 的增广矩阵化为行阶梯为

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 4 & 4m-3n & 0 & 0 & 12-t \\ 0 & n & 0 & -4 & -10-t \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1-t \end{array}\right]$$

对应齐次方程的基础解系：① $n\neq0$ 时，$\xi=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}-\frac{m}{n}\\ \frac{4}{n}\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$ ② $n=0$ 时，$\xi^*=\begin{bmatrix}m\\1\\0\\0\end{bmatrix}$

$\because$ (I) 与 (II) 同解 $\therefore n$ 必不等于0

$\therefore \begin{cases}\frac{3}{4}-\frac{m}{n}=1\\ \frac{4}{n}=1\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=2\\n=4\end{cases}$ 代回方程（特解），得 $1-t=-5$
$t=6$

综上所述，$m=2, n=4, t=6$ 时，方程组 I, II 同解.

第五章 二次型

一、1. 标准型为 $f(x_1,x_2,x_3)=-y_1^2+y_2^2-12y_3^2$

所作的非退化的线性替换为 $\begin{cases} y_1=-x_1+x_2 \\ y_2=x_1+2x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_2-2y_3 \\ x_2=y_1+y_2-2y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$ (注：验证非退化，需验证 $|\ |\neq 0$)

2. 标准型为 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=y_1^2-\frac{1}{4}y_2^2-y_3^2+\frac{5}{4}y_4^2$.

所作的非退化的线性替换为 $P=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. (1) 二次型的矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，其顺序主子式 $1>0$，$\begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix}=4-t^2>0$，$\begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=4-2t^2>0$

$\therefore -\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$ 时，二次型为正定的

(2) 二次型的矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & t \\ -1 & t & 3 \end{bmatrix}$，其顺序主子式 $1>0$，$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}>0$，$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & t \\ -1 & t & 3 \end{vmatrix}=2-(t+1)^2>0$

$\therefore -1-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}-1$ 时，二次型为正定的.

二、1. $\because A'=A$，$B'=B$

$\therefore (A+B)'=A'+B'=A+B$

$\therefore A+B$ 为对称矩阵

下面我们证明 $A+B$ 是正定的

$\because A,B$ 是正定矩阵

$\therefore \exists$ 正定二次型 $f(x_1,x_2,\cdots x_n)=X^TAX>0$

$f(x_1,x_2,\cdots x_n)=X^TBX>0$

$\therefore$ 对于 $\forall X\in R^{n\times 1}$ $(X\neq 0)$，恒有

$f(x_1,x_2\cdots x_n)=X^T(A+B)X$

$=X^TAX+X^TBX>0$

$\therefore A+B$ 是正定矩阵，结论得证

2. $\because (A'A)' = A' \cdot (A')' = A' \cdot A$

$\therefore$ $A'A$ 为对称矩阵

下面我们证明 $A'A$ 是正定的

$\because$ A 可逆，且 $A'A = A'EA$

$\therefore$ $A'A$ 与 E 合同

$\therefore$ $A'A$ 正定，结论得证

（注：① A 可逆说明线性替换是非退化的）

② 与 E 合同，说明与 E 有相同的正惯性指数

而 E 的正惯性指数 $= n$

3. $\because$ A 正定

$\therefore$ $A' = A$ $\therefore$ A' 为对称矩阵

下面我们证明 A' 是正定的.

$\because$ A 正定，$\therefore$ A 与 E 合同

即 $\exists$ 一个可逆矩阵 C，使得 $A = C'EC$

对上述等式两边同时取转置，得

$$A' = (C'EC)' = C'E'(C')' = C'EC$$

$\therefore$ A' 与 E 合同 $\therefore$ A' 为正定矩阵，结论得证.

第六章，线性空间

一. 1). 取 R^3 中的一组标准基 $\varepsilon_1=(1,0,0)$, $\varepsilon_2=(0,1,0)$, $\varepsilon_3=(0,0,1)$

有 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{bmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\cdot A$

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{bmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{bmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\cdot B$

$\therefore(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\cdot A^{-1}B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{bmatrix}$ 即为过渡矩阵，记为C.

设 x_1,x_2,x_3 为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的坐标.

x_1',x_2',x_3' 为 β_1,β_2,β_3 的坐标.

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\cdot C\cdot\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}$

$\therefore\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}$ 为[redacted]坐标的变换公式.

2(1) $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 即为 R^4 的一组标准基

$\therefore$

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\cdot\begin{bmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{bmatrix}$ 即为过渡矩阵，记为A.

(2) 由上述可知 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\cdot A^{-1}$

设 $\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)$

$\because\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 为一组标准基 $\therefore\alpha$ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的坐标为 x_1,x_2,x_3,x_4

即 $\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\cdot A^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$

$\therefore\alpha$ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标为 $A^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\frac{1}{27}\begin{bmatrix}12&9&-27&-33\\1&12&-9&-23\\9&0&0&-18\\-7&-3&9&26\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$

3. 设 r 在两组基下的坐标均为 (x_1, x_2, x_3)，即

$$r=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

即 $\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\-1&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

即 $\begin{bmatrix}1&-2&-1\\1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$，得方程组的基础解系为 $\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}$

$$\therefore r=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}\cdot k=\begin{bmatrix}-k\\-3k\\-2k\end{bmatrix}$$

4. $\because |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}1&-1&0\\2&1&3\\3&1&2\end{vmatrix}\neq 0$

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 R^3 的一组基.

设 $\beta_1=x_{11}\alpha_1+x_{21}\alpha_2+x_{31}\alpha_3$

$\beta_2=x_{12}\alpha_1+x_{22}\alpha_2+x_{32}\alpha_3$

其中 x_{11}, x_{21}, x_{31} 为 β_1 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标，

x_{12}, x_{22}, x_{32} 为 β_2 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标.

即 $(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\\x_{31}&x_{32}\end{bmatrix}$

记作 $B=AX$

$X=A^{-1}B$ （$\because \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关 $\therefore A$ 可逆）

$=\begin{bmatrix}2&3\\3&-3\\-1&2\end{bmatrix}$ 　　即 $\beta_1=2\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$

$\beta_2=3\alpha_1-3\alpha_2-2\alpha_3$

二、1. 显然S是非空的 ($0\in S$)

下面我们证明S对加法与数乘封闭.

$(A+B)'=A'+B'=A+B$

$(kA)'=kA'=kA$

$\therefore$ S对加法与数量乘法封闭.

且这两种矩阵运算满足线性空间的 8条定义

$\therefore$ S是线性空间, 结论得证.

而 $E_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ $E_2=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ $E_3=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

$E_4=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ $E_5=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ $E_6=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

构成S的一组基, S的维数为6.

第七章 线性变换

一. 1-3 × × ×

二. 1. (1) $\lambda_1=\frac{3+\sqrt{37}}{2}$，对应特征向量为 $\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{37}+1}{6}\\ 1\end{bmatrix}$

$\lambda_2=\frac{3-\sqrt{37}}{2}$，对应特征向量为 $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{37}-1}{6}\\ 1\end{bmatrix}$

(2) $\lambda_1=2$（二重）, $\lambda_2=11$（单重）

$\lambda_1=2$ 的特征向量为 $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$

$\lambda_2=11$ 的特征向量为 $\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{bmatrix}$

(3) $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=4$, $\lambda_3=1$（均为单重）

$\lambda_1=-2$ 的特征向量为 $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$

$\lambda_2=4$ 的特征向量为 $\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$

$\lambda_3=1$ 的特征向量为 $\begin{bmatrix}2\\ 1\\ -2\end{bmatrix}$

(4) $\lambda_1=1$（三重）$\lambda_2=2$（单重）

λ_1 的特征向量为 $\begin{bmatrix}4\\ -2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$，$\lambda_2$ 的特征向量为 $\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$

2. A的特征值为 $\lambda_1=1$（二重）, $\lambda_2=2$（单重）

λ_1 的特征向量为 $\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$，$\lambda_2$ 的特征向量为 $\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$

令 $P=\begin{bmatrix}0&1&-1\\ 1&1&1\\ 1&1&2\end{bmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&2\end{bmatrix}$

$$(P^{-1}AP)^{100}=P^{-1}A^{100}P=\begin{bmatrix}1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&2\end{bmatrix}^{100}$$

$$\therefore A^{100}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\ 1&1&1\\ 1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&-1\\ 1&1&1\\ 1&1&2\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1&2^{100}-1&1-2^{100}\\ 0&2-2^{100}&2^{100}-1\\ 0&2-2^{100}&2^{100}-1\end{bmatrix}.$$

3. $\because \lambda_1=1, \lambda_2=0, \lambda_3=-1$ 为不同的特征值

$\therefore x_1, x_2, x_3$ 线性无关

即 $P=(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix}1&2&-2\\ 2&-2&-1\\ 2&1&2\end{bmatrix}$ 可逆，且 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&-1\end{bmatrix}$

$$\therefore A=P\begin{bmatrix}1&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&-1\end{bmatrix}P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1&0&2\\ 0&1&2\\ 2&2&0\end{bmatrix}$$

三. 1. 对于 $\forall A,B\in V$, $k\in R$, 有

$$T(A+B)=P'(A+B)P$$
$$=P'AP+P'BP$$
$$=T(A)+T(B)$$
$$T(kA)=P'(kA)P=k(P'AP)$$
$$=kT(A)$$

∴变换T对加法与数乘封闭 ∴T是V的线性变换

2. 设A的特征值为λ, 其对应特征向量为x, 有

$$Ax=\lambda x$$

两边同乘A (左乘)

$$A^2x=A(\lambda x)$$
$$=\lambda Ax$$
$$=\lambda^2 x$$

$\because A^2=A$ $\therefore Ax=\lambda^2 x$

$\lambda x=\lambda^2 x$

$\therefore \lambda=0$ 或 $\lambda=1$

3. 设A的特征值为λ, 其对应特征向量为x, 有

$$Ax=\lambda x$$

两边同乘A (左乘)

$$A^2x=A(\lambda x)$$
$$=\lambda(Ax)$$
$$=\lambda^2 x$$

$\because A^2=E$ $\therefore x=\lambda^2 x$

$\therefore \lambda=\pm 1$

4. 反证法: 设 $\alpha_1+\alpha_2$ 是A属于特征值λ的特征向量

即 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda\alpha_1+\lambda\alpha_2$

由已知得 $A(\alpha_1+\alpha_2)=A\alpha_1+A\alpha_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda\alpha_2$

所以有 $(\lambda-\lambda_1)\alpha_1+(\lambda-\lambda_2)\alpha_2=0$

$\because \lambda_1,\lambda_2$ 是不同的特征值 $\therefore \alpha_1,\alpha_2$ 线性无关, 即 $\lambda-\lambda_1=\lambda-\lambda_2=0$

即 $\lambda_1=\lambda_2$, 与题设矛盾

$\therefore \alpha_1+\alpha_2$ 不是A的特征向量. 结论得证

第八章 欧几里德空间

一. 1.(1) $\beta_1=\alpha_1=(0,1,1)'$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,1,0)'-\frac{1}{2}(0,1,1)'=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})'$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})'$$

(2) $\beta_1=\alpha_1=(1,0,-1,1)'$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,-1,0,1)'-\frac{2}{3}(1,0,-1,1)'=(\frac{1}{3},-1,\frac{2}{3},\frac{1}{3})'$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=(-\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5})$$

2. (1)
$$T=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{-2}{\sqrt5} & \frac{2\sqrt5}{15}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt5} & \frac{4\sqrt5}{15}\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt5}{3}\end{bmatrix}\qquad T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-8\end{bmatrix}$$

(2)
$$T=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt5} & -\frac{4\sqrt5}{15}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt5} & -\frac{2\sqrt5}{15}\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt5}{3}\end{bmatrix}\qquad T^{-1}AT=\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&-3&0\\0&0&6\end{bmatrix}$$

(3)
$$T=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\qquad T^{-1}AT=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&6\end{bmatrix}$$

(4)
$$T=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\qquad T^{-1}AT=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&5&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

3. 二次型矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{bmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & -1\\ -a & \lambda-1 & -b\\ -1 & -b & \lambda-1\end{vmatrix}$$

由题可知 A 的特征值为 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=2$

将 $\lambda_2=1$ 代入特征多项式, 得 $2ab=0$

将 $\lambda_3=2$ 代入特征多项式, 得 $a=0$

将 $\lambda_1=0$ 代入特征多项式, 得 $b=0$

代入a,b后分别求出对应的特征向量，分别单位正交化，得

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \quad 使 P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

4. $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$

A的特征值 $\lambda_1=1$ (二重), $\lambda_2=10$ (单重)

λ_1对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$，$\lambda_2$对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\1\end{pmatrix}$

则 $T=\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ 使得 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{pmatrix}=B$

$\therefore A=TBT^{-1}$

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(x_1,x_2,x_3)TBT^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=(y_1,y_2,y_3)B\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

$\therefore T^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 即

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=T^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0\\ \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{\sqrt{5}}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \quad 即 \begin{cases}y_1=-\frac{2}{\sqrt{5}}x_1+\frac{1}{\sqrt{5}}x_2\\ y_2=\frac{2\sqrt{5}}{15}x_1+\frac{4\sqrt{5}}{15}x_2+\frac{\sqrt{5}}{3}x_3\\ y_3=-\frac{1}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3\end{cases}$$

$\therefore$ 二次曲面的标准方程为

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}x_1+\frac{1}{\sqrt{5}}x_2\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{5}}{15}x_1+\frac{4\sqrt{5}}{15}x_2+\frac{\sqrt{5}}{3}x_3\right)^2+10\left(-\frac{1}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3\right)^2=1$$

二. 1. $\because H=E-2XX'$

$\therefore H'=(E-2XX')'=E'-2(XX')'=E-2(XX')=H$

$\therefore H$为对称矩阵

下面我们证明H为正交矩阵

$H'H=(E-2XX')(E-2XX')$

$=E^2-2E(XX')-2(XX')E+4(XX')(XX')$

$=E-4(XX')+4(XX')(XX')=E$ $\therefore H$是对称的正交矩阵，结论得证.

2. $\because A, B$为正交矩阵

$\therefore AA' = BB' = E$

$$
\begin{aligned}
(AB)(AB)' &= AB \cdot B'A' \\
&= A(BB')A' \\
&= AEA' \\
&= AA' \\
&= E
\end{aligned}
$$

$\therefore AB$也是正交矩阵，结论得证.