# 精通教育 2019 高等数学模拟题（一）参考答案

一、 单项选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 选对得 3 分，选错、未选或多选得 0 分)

1.C　2.C　3.D　4.B　5.C　6.A　7.A　8.【数一】D【数二】A　9.A　10.A

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分. 填对得 4 分，未填或错填得 0 分)

11. $\frac{3}{2}$　12. 5　13. $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$　14. $\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}$　15. $\frac{1}{2}\pi R^2$

三、计算题(本大题共 4 小题, 每小题 10 分, 共 40 分. 解答过程、步骤和答案必须完整正确)

16.解：$\frac{\partial z}{\partial x}=yf(\frac{x}{y})+xyf'(\frac{x}{y})\frac{1}{y}=yf(\frac{x}{y})+xf'(\frac{x}{y})$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xf(\frac{x}{y})+xyf'(\frac{x}{y})(-\frac{x}{y^2})=xf(\frac{x}{y})-\frac{x^2}{y}f'(\frac{x}{y})$$

所以 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2z$.

17.解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\ln(1+t)dt}{\sin^4 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\ln(1+t)dt}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)2x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^3}{4x^3}=\frac{1}{2}$

18.【数一】解：$I=\int_{OA}(x^2+y)dx+(x+\sqrt{y})dy+\int_{AB}(x^2+y)dx+(x+\sqrt{y})dy$

$$=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1(1+\sqrt{y})dy$$

$$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+(y+\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}})\Big|_0^1=2.$$

【数二】解：$I=0+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2x)dx=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi+2}{4}$

19.解：

$$[A|b]=\begin{bmatrix}1&2&-1&1&1\\-2&-4&1&-3&4\\4&8&-3&5&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-1&1&1\\0&0&-1&-1&6\\0&0&1&1&-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-1&1&1\\0&0&-1&-1&6\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\to\begin{bmatrix}1&2&0&2&-5\\0&0&1&1&-6\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$原方程对应的齐次方程的通解方程为$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_4=0\\x_3+x_4=0\end{cases}$,

$\begin{cases}x_1=-2x_2-2x_4\\x_3=-x_4\end{cases}$，取 $x_2,x_4$ 为自由未知元，得基础解系 $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$. 令

$x_2=x_4=0$，得原方程的一个特解为 $\begin{pmatrix}-5\\0\\-6\\0\end{pmatrix}$. 所以原方程的通解为

$k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5\\0\\-6\\0\end{pmatrix}$.（$k_1,k_2$ 为任意常数）.

四、应用题(本题 10 分. 解答过程、步骤和答案必须完整、正确)

20.【数一】解：设窗户面积为 $S$，周长为 $L$，则 $S=\frac{\pi}{2}x^2+2hx,h=\frac{S}{2x}-\frac{\pi}{4}x$，

所以窗户周长 $L=\pi x+2x+2h=\frac{\pi}{2}x+2x+\frac{S}{x},L'=\frac{\pi}{2}+2-\frac{S}{x^2}$

令 $L'=0$ 得 $x=\sqrt{\frac{2S}{\pi+4}}$，当 $x<\sqrt{\frac{2S}{\pi+4}}$ 时，$L'<0$，当 $x>\sqrt{\frac{2S}{\pi+4}}$ 时，

$L'>0$，所以当 $x=\sqrt{\frac{2S}{\pi+4}}$ 时取得最小值.此时

$$\frac{h}{x}=\frac{2S-\pi x^2}{4x^2}=\frac{2S}{4x^2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi+4}{4}-\frac{\pi}{4}=1.$$

【数二】解：收益 $R=nx=[\frac{a}{x-40}+b(80-x)]x$

成本 $C=40n=40[\frac{a}{x-40}+b(80-x)]$

利润 $L=R-C=[\frac{a}{x-40}+b(80-x)](x-40)=a+b(-x^2+120x-3200)$

边际利润 $L'=b(-2x+120)$，令 $L'=0$ 得 $x=60$，所以当定价为 60 元时取得最大利润.

# 精通教育 2019 高等数学模拟题（二）参考答案

**一、 单项选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 选对得 3 分，选错、未选或多选得 0 分).**

1.C　2.C　3.B　4. D　5.A　6. D　7.B　8.【数一】C【数二】A　9.B　10.C

**二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分. 填对得 4 分，未填或错填得 0 分).**

11. $2$　12. $-11$　13. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$　14. $y=\dfrac{c}{x}$　15. $-2\pi dx-dy$

**三、计算题(本大题共 4 小题, 每小题 10 分, 共 40 分. 解答过程、步骤和答案必须完整正确).**

16.解：$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x+e^{3x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}(2\cos2x+3e^{3x})=5$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $a=f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=5$

17.解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos t}{2t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{-t\sin t-\cos t}{t^2}\cdot\frac{1}{2t}=-\frac{t\sin t+\cos t}{4t^3}$$

18.【数一】解法一：设直线段 $OB$ 为 $L_1:y=0(0\le x\le2)$

令 $P=3x^2+2y$，$Q=12x+y$

$D$ 是以 $O,B,A$ 为顶点的三角形区域

由格林公式可得

$$I=\oint_{L+L_1}Pdx+Qdy-\int_{L_1}Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy-\int_0^2 3x^2dx$$

$$=\iint_D 10dxdy-x^3\Big|_0^2=12$$

解法二：$OA$ 的方程为 $y=2x$，$AB$ 的方程为 $y=4-2x$

$$I=\int_{\overline{BA}}(3x^2+2y)dx+(12x+y)dy+\int_{\overline{AO}}(3x^2+2y)dx+(12x+y)dy$$

$$=\int_2^1[(3x^2-4x+8)-2(12x-2x+4)]dx+\int_1^0[(3x^2+4x)+2(12x+2x)]dx$$

$$=\int_2^1(3x^2-24x)dx+\int_1^0(3x^2+32x)dx$$

$$=(x^3-12x^2)\Big|_2^1+(x^3+16x^2)\Big|_1^0=12$$

【数二】解：$\int e^x\ln(1+e^x)dx=\int\ln(1+e^x)d(e^x+1)\overset{令u=e^x+1}{=}\int\ln udu$

$$=u\ln u-\int ud\ln u=u\ln u-\int u\frac{1}{u}du$$

$$=u\ln u-u+C$$

$$=(e^x+1)\ln(e^x+1)-(e^x+1)+C$$

19.解：

$$[A|b]=\begin{bmatrix}1&2&3&1&3\\1&4&5&2&2\\2&9&8&3&7\\3&7&7&2&12\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&0&4\\0&3&0&0&2\\0&0&-2&-1&\frac{7}{3}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{31}{6}\\0&1&0&0&\frac{2}{3}\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{7}{6}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

即齐次方程的通解为 $\xi=k(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},1)^T$，$k$ 为任意常数

非齐次方程的特解为 $\eta=(\frac{31}{6},\frac{2}{3},-\frac{7}{6},0)^T$

则非齐次方程的通解为 $k\xi+\eta=k(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},1)^T+(\frac{31}{6},\frac{2}{3},-\frac{7}{6},0)^T$（$k$ 为任意常数）.

**四、应用题(本题 10 分. 解答过程、步骤和答案必须完整、正确).**

20.【数一】解：设矩形一条边为 $x$，另一条边为 $y$，则有 $x+y=P$，

若此矩形沿着长度为 $x$ 的边旋转，则体积为 $V=\pi y^2 x=\pi(P-x)^2 x$

$V'=\pi(P-x)(P-3x)$

令 $V'(x)=0$ 得 $x=P$（舍），$x=\dfrac{P}{3}$

易得当 $x=\dfrac{P}{3}$ 时，$V$ 取得最大值，即矩形的一条边长为 $\dfrac{P}{3}$，另一条边长 $\dfrac{2P}{3}$，且沿着此边旋转时构成的圆柱体体积最大

【数二】解：由 $Q=200-4P$，得 $P=\dfrac{1}{4}(200-Q)$

故收入函数 $R(Q)=PQ=\dfrac{1}{4}Q(200-Q)$

边际收入函数为 $R'(Q)=\dfrac{1}{4}(200-Q)-\dfrac{1}{4}Q=\dfrac{1}{2}(100-Q)$

所以 $R'(50)=25, R'(100)=0$

这说明当销售量即需求量为 50 个单位时，再增加销售量可使总收入增加，再多销售一个单位产品，总收入约增加 25 个单位，当销售量为 100 个单位时，总收入达到最大值，再扩大销售量总收入将不会再增加.

# 精通教育 2019 高等数学模拟题（三）参考答案

**一、单项选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 选对得 3 分，选错、未选或多选得 0 分).**

1. D　2. D　3. C　4. B　5. B　6.B　7. B　8. C　9.【数一】A 【数二】B　10. 【数一】A 【数二】D

**二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分. 填对得 4 分，未填或错填得 0 分).**

11. $\frac{1}{6}$　12. $\frac{17}{10}$，$\frac{1}{6}$　13. $[1,5)$　14. $4dx+7dy$

15. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

**三、计算题(本大题共 4 小题, 每小题 10 分, 共 40 分. 解答过程、步骤和答案必须完整正确).**

16.解：令 $x-1=t$，则 $x=t+1$，$\because 0\le x\le 2,\therefore -1\le t\le 1$

$$\begin{aligned}&\int_0^2 f(x-1)dx\\&=\int_{-1}^1 f(t)dt\\&=\int_{-1}^1 f(x)dx\\&=\int_{-1}^0 e^x dx+\int_0^1 \ln(1+x)dx\\&=e^x\Big|_{-1}^0+\left[\ln(1+x)\cdot x\right]\Big|_0^1-\left[x-\ln(1+x)\right]\Big|_0^1\\&=1-\frac{1}{e}+(\ln 2-0)-(1-\ln 2-0+0)\\&=2\ln 2-\frac{1}{e}\end{aligned}$$

17.解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot 2xy$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\left(f_{11}''\cdot 2y+f_{12}''\cdot x^2\right)\cdot 2x+\left(f_{21}''\cdot 2y+f_{22}''\cdot x^2\right)\cdot 2xy+f_2'\cdot 2x\\&=4xy\cdot f_{11}''+2x^3\cdot f_{12}''+4xy^2\cdot f_{21}''+2x^3y\cdot f_{22}''+2xf_2'\\&=4xy\cdot f_{11}''+\left(2x^3+4xy^2\right)f_{12}''+2x^3y\cdot f_{22}''+2xf_2'\end{aligned}$$

18.【数一】解：原方程所对应的齐次方程 $y''-8y'+12y=0$，

特征方程为 $r^2-8r+12=0$，

特征根为 $r_1=2,r_2=6$.

则齐次方程的通解 $Y=C_1\cdot e^{2x}+C_2\cdot e^{6x}$，

设非齐次方程的特解形式为 $y^*=e^{6x}(Ax+B)\cdot x$，

将特解代入原式得 $A=\frac{1}{8},B=-\frac{1}{16}$，

则非齐次方程的通解为 $y=C_1\cdot e^{2x}+C_2\cdot e^{6x}+e^{6x}\left(\frac{1}{8}x-\frac{1}{16}\right)\cdot x$

【数二】解：由原式得

$$\begin{aligned}&\sin y\cos ydy=x^2\ln xdx\\&\Rightarrow\int\sin y\cos ydy=\int x^2\ln xdx\\&\Rightarrow-\frac{1}{4}\cos 2y=\ln x\cdot\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{9}x^3+C\end{aligned}$$

将 $y\big|_{x=1}=0$ 代入得 $C=-\frac{5}{36}$，

则特解为 $-\frac{1}{4}\cos 2y=\ln x\cdot\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{9}x^3-\frac{5}{36}$，

化解得 $\cos 2y=\left(-\frac{4}{3}\ln x+\frac{4}{9}\right)x^3+\frac{5}{9}$.

19.解：系数矩阵 A=$\begin{pmatrix}1&1&3&8\\-1&0&-2&5\\2&2&7&18\\1&1&4&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-9\\0&1&0&11\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

$r(A)=3<4$,则方程组有无穷多解，

对应的同解方程组为$\begin{cases}x_1-9x_4=0\\x_2+11x_4=0\\x_3+2x_4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=9x_4\\x_2=-11x_4\\x_3=-2x_4\end{cases}$，

令自由未知量 $x_4=1$，则基础解系 $\xi=\begin{pmatrix}9\\-11\\-2\\1\end{pmatrix}$，

该方程组的通解为 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k\xi=k\begin{pmatrix}9\\-11\\-2\\1\end{pmatrix}$（$k$ 为任意常数）.

**四、应用题(本题 10 分. 解答过程、步骤和答案必须完整、正确).**

20.【数一】解：设圆周长为 $x$，则正方形周长为 $l-x$.

$S=S_1+S_2=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{l-x}{4}\right)^2=\frac{4+\pi}{16\pi}x^2-\frac{l}{8}x+\frac{l^2}{16}(0<x<l)$，

令 $S'=\frac{4+\pi}{8\pi}x-\frac{l}{8}=0$，得 $x=\frac{l\pi}{4+\pi}$，

又 $S''=\frac{4+\pi}{8\pi}>0$，故 $x=\frac{l\pi}{4+\pi}$ 为 $S$ 的极小值点，此时 $S_1=\frac{\pi l^2}{4(4+\pi)^2}$，

$S_2=\left(\frac{l}{4+\pi}\right)^2$，$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\pi}{4}$，即当$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\pi}{4}$时，$S_1+S_2$ 取最小值.

【数二】解：由题意得，利润
$$\begin{aligned}L&=R(x)-C(x)\\&=px-C(x)\\&=\frac{100-x}{2}\cdot x-(100+3x)\\&=-\frac{1}{2}x^2+47x-100\end{aligned}$$

$L'=-x+47=0$，$x=47$ 为可能极值点，

$L''=-1<0$，则该极值点为极大值点.

即当 $x$ 为 47 时利润最大，利润 $L=-\frac{1}{2}\times47^2+47\times47-100=1004.5$.

# 精通教育 2019 高等数学模拟题（四）参考答案

一、 单项选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 选对得 3 分，选错、未选或多选得 0 分).

1. B　2. A　3. A　4. D　5. B　6.【数一】A 【数二】C　7. C　8. B　9.C　10. A

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分. 填对得 4 分，未填或错填得 0 分).

11. 1　0　12. $\frac{1}{8}$　13. 【数一】$1-\cos 1$ 【数二】$\frac{e}{2}-1$　14. $[-2,4)$

15. 【数一】 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$ 【数二】 0

三、计算题(本大题共 4 小题, 每小题 10 分, 共 40 分. 解答过程、步骤和答案必须完整正确).

16.解：令 $x+1=t$，则 $x=t-1$

$$原式=\int_0^2 f(t)d(t-1)$$

$$=\int_0^2 f(t)dt$$

$$=\int_0^2 f(x)dx$$

$$=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int_1^2 2x\ln x dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d\left(1-x^2\right)+\int_1^2 \ln x dx^2$$

$$=-\frac{1}{2}\times 2\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1+x^2\ln x\Big|_1^2-\int_1^2 x^2 d\ln x$$

$$=4\ln 2-\frac{1}{2}$$

17.解：令 $u=e^{2x+y}$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f\left(e^{2x+y}\right)+x\frac{\partial f}{\partial x}=f\left(e^{2x+y}\right)+x\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$=f\left(e^{2x+y}\right)+xf_u'e^{2x+y}\cdot 2=f\left(e^{2x+y}\right)+2xe^{2x+y}f_u'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[f\left(e^{2x+y}\right)+2xe^{2x+y}f_u'\right]=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(2xe^{2x+y}f_u'\right)$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+2x\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{2x+y}f_u'\right)=f_u'e^{2x+y}+2x\left(e^{2x+y}f_u'+e^{2x+y}\frac{\partial f_u'}{\partial y}\right)$$

$$=e^{2x+y}f_u'+2x\left(e^{2x+y}f_u'+e^{2x+y}\frac{\partial f_u'}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$=e^{2x+y}f_u'+2x\left(e^{2x+y}f_u'+e^{2x+y}f_{uu}''e^{2x+y}\right)$$

$$=e^{2x+y}\left[f_u'+2x\left(f_u'+e^{2x+y}f_{uu}''\right)\right]$$

18.【数一】解: 令 $P=-x^2y+xy^2+4$， $Q=xy^2+x^2y-6$

则 $\frac{\partial Q}{\partial x}=y^2+2xy$， $\frac{\partial P}{\partial y}=-x^2+2xy$

$$故原式=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D\left(x^2+y^2\right)dxdy$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{\pi}{4}$$

【数二】解：设 $P_0(x_0,y_0)$，则切线方程为 $y-\left(x_0^2+2\right)=2x_0(x-x_0)$，

整理得 $y=2x_0x-x_0^2+2$

$$S=\int_0^6\left[\left(x^2+2\right)-\left(2x_0x-x_0^2+2\right)\right]dx=6x_0^2-36x_0+72$$

令 $S'=0$ 得 驻点 $x_0=3$，$y_0=11$

$S''(3)=12>0$　所以有极小值

故当 $x_0=3$，$y_0=11$ 时面积最小，即 $P_0(3,11)$ 面积最小，最小面积为 $S(3)=18$

19.解：$B=\left(A|b\right)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&3&-1&7&a\\2&1&3&-1&4\\4&5&3&7&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&1&-3&2\\0&2&-2&6&a-1\\0&1&-1&3&b-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&1&-3&2\\0&0&0&0&a+3\\0&0&0&0&b-2\end{pmatrix}$

当 $a=-3$，$b=2$ 时，$r\left(A\right)=r\left(B\right)=2<4$，方程组有无穷多解

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&1&-3&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-2&3\\0&1&-1&3&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

对应齐次方程组为$\begin{cases}x_1+2x_3-2x_4=0,\\x_2-x_3+3x_4=0\end{cases}$

令自由未知量为$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$,

得基础解系$\xi_1=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

非齐次同解方程组为$\begin{cases}x_1+2x_3-2x_4=3,\\x_2-x_3+3x_4=-2\end{cases}$

令$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

得非齐次方程组特解为$\eta=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\\0\end{pmatrix}$

则原方程组通解为$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-2\\0\\0\end{pmatrix}$（$k_1,k_2$ 为任意常数）

**四、应用题(本题 10 分．解答过程、步骤和答案必须完整、正确).**

20.【数一】解：设长方体底面的长为 $x$ m，宽为 $y$ m，高为 $z$ m，体积为 $V$ $\mathrm{m}^3$

由题意知 $xy+2xz+2yz=432$，$V=xyz$

构造拉格朗日函数得 $F\left(x,y,z,\lambda\right)=xyz+\lambda\left(xy+2xz+2yz-432\right)$

令$\begin{cases}F_x'=yz+\lambda\left(y+2z\right)=0,\\F_y'=xz+\lambda\left(x+2z\right)=0,\\F_z'=xy+\lambda\left(2x+2y\right)=0,\\F_\lambda'=xy+2xz+2yz-432=0,\end{cases}$ 得 $x=y=12$，$z=6$

即长为 $12$ m，宽为 $12$ m，高为 $6$ m时，水池容积最大.

【数二】解：设每台冰箱降价 $x$ 元，则 $y=\left(2400-2000-x\right)\left(8+4\cdot\dfrac{x}{50}\right)$，

即 $y=-\dfrac{2}{25}x^2+24x+3200$，令 $y'=0$ 得 $x=150$，又 $y''<0$.

故每台冰箱降价 150 元时，商场每天利润最大.

# 精通教育 2019 高等数学模拟题（五）参考答案

**一、 单项选择题 (本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分．选对得 3 分，选错、未选或多选得 0 分).**

1. D　2. C　3. B　4. D　5. C　6. A　7. D　8. 【数一】B 【数二】B　9. D　10. B

**二、填空题 (本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分．填对得 4 分，未填或错填得 0 分).**

11. $-\mathrm{e}$　　12. $\left[\ln(x-y)+\dfrac{x}{x-y}\right]dx+\dfrac{x}{y-x}dy$　　13. 3

14.【数一】$y=\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$ 【数二】$y=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}+\ln|1+x|+C$

15. 【数一】5 $\{-1,-1,-1\}$ 【数二】$-4$

**三、计算题(本大题共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分．解答过程、步骤和答案必须完整正确).**

16.解：令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$

$$\text{原式}=\int\cos t dt^2=2\int t\cos t dt=2\int t d\sin t$$
$$=2\left(t\sin t-\int\sin t dt\right)$$
$$=2(t\sin t+\cos t)+C$$
$$=2\left(\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}\right)+C$$

17.解：令 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^{xyz}-xyz$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{yz\mathrm{e}^{xyz}-yz}{xy\mathrm{e}^{xyz}-xy}=-\frac{z}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{xz\mathrm{e}^{xyz}-xz}{xy\mathrm{e}^{xyz}-xy}=-\frac{z}{y}.$$

18.【数一】解：$\oint_L x\mathrm{e}^{-y^2}dx=\int_{L_{OA}}x\mathrm{e}^{-y^2}dx+\int_{L_{AB}}x\mathrm{e}^{-y^2}dx+\int_{L_{BO}}x\mathrm{e}^{-y^2}dx$

$$=\int_0^1 xdx+0+\int_1^0 x\mathrm{e}^{-x^2}dx=\frac{1}{2\mathrm{e}}$$

【数二】解：$p(x)=-\dfrac{1}{x+1}$，$q(x)=x$

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)dx}dx+C\right)$$
$$=\mathrm{e}^{-\int-\frac{1}{x+1}dx}\left(\int x\mathrm{e}^{\int-\frac{1}{x+1}dx}dx+C\right)$$
$$=\mathrm{e}^{\ln|x+1|}\left(\int x\mathrm{e}^{-\ln|x+1|}dx+C\right)$$
$$=(x+1)\left(\int\frac{x}{x+1}dx+C\right)$$
$$=(x+1)\left[\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx+C\right]$$
$$=(x+1)(x-\ln|x+1|+C)$$

由 $y(0)=1$，得 $C=1$

则 $y^*=(x+1)(x-\ln|x+1|+1)$

19. 解：

$$B=(A|b)=\begin{pmatrix}1&2&-1&1&2\\1&1&0&3&5\\2&5&-3&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&1&2\\0&-1&1&2&3\\0&1&-1&-1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&1&2\\0&-1&1&2&3\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$r(A)=r(B)=3<4$，有无穷多解

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&1&2\\0&-1&1&2&3\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&3\\0&1&-1&0&-1\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

对应齐次同解方程组为$\begin{cases} x_1+x_3=0, \\ x_2-x_3=0, \\ x_4=0 \end{cases}$

令自由未知量$x_3=1$，

得基础解系$\xi=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，

非齐次同解方程组为$\begin{cases} x_1+x_3=3, \\ x_2-x_3=-1, \\ x_4=1 \end{cases}$

令$x_3=0$，得非齐次方程组特解$\eta=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

则原方程组通解$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$（$k$为任意常数）

**四、应用题(本题10分．解答过程、步骤和答案必须完整、正确).**

20.【数一】解：设长方体长为$x$ cm，宽为$y$ cm，高为$z$ cm.

据题意得：$x^2+y^2+z^2=36$，长方体体积$V=xyz$

构造拉格朗日函数：$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-36\right)$

则：$\begin{cases} L_x'=yz+2\lambda x=0 \\ L_y'=xz+2\lambda y=0 \\ L_z'=xy+2\lambda z=0 \\ L_\lambda'=x^2+y^2+z^2-36=0 \end{cases}$，得$x=y=z=2\sqrt{3}$，则$V_{\max}=24\sqrt{3}$.

所以，当长、宽、高分别为$2\sqrt{3}$ cm时，体积最大，最大体积为$24\sqrt{3}\text{cm}^3$.

【数二】解：由$C=C_0+C(Q)=50+2(25-2P)=100-4P$

及$R=PQ=P(25-2P)=-2P^2+25P$

得$L=R-C=-2P^2+29P-100$

令$L'=-4P+29=0$，得$P=\dfrac{29}{4}$

由$L''=-4<0$，得$L$有极大值

故当$P=\dfrac{29}{4}$时，工厂利润$L$最大.

# 精通教育 2019 高等数学模拟题（六）参考答案

**一、单项选择题 (本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分. 选对得 3 分，选错、未选或多选得 0 分).**

1. C 2. B 3. A 4. C 5.【数一】C 【数二】A 6. C 7. A 8. B 9.A 10.【数一】C 【数二】D

**二、填空题 (本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分. 填对得 4 分，未填或错填得 0 分).**

11. $\frac{1}{3}$ 12. 【数一】 $x-3=y-2=z-1$【数二】50

13. $(y^2e^{xy^2}+2xy)dx+(2xye^{xy^2}+x^2)dy$ 14. 1 15. 9

**三、计算题(本大题共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分. 解答过程、步骤和答案必须完整正确).**

16.解：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\arctan^4 xdx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\arctan^4 xd(\arctan x)$$
$$=\frac{1}{5}\arctan^5 x\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$
$$=\frac{1}{5}(\lim_{x\to+\infty}\arctan^5 x-\lim_{x\to-\infty}\arctan^5 x)$$
$$=\frac{1}{5}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^5-\left(-\frac{\pi}{2}\right)^5\right]$$
$$=\frac{\pi^5}{80}$$

17. 解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2xy+f_2'\cdot e^{xy}\cdot y=2xyf_1'+ye^{xy}f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf_1'+2xy(f_{11}''\cdot x^2+f_{12}''\cdot e^{xy}\cdot x)+e^{xy}f_2'+xye^{xy}f_2'+ye^{xy}(f_{21}''\cdot x^2+f_{22}''\cdot e^{xy}\cdot x)$$

$$=2xf_1'+2x^3yf_{11}''+2x^2ye^{xy}f_{12}''+e^{xy}f_2'+xye^{xy}f_2'+x^2ye^{xy}f_{21}''+xye^{2xy}f_{22}''$$

$$=2xf_1'+2x^3yf_{11}''+(xy+1)e^{xy}f_2'+3x^2ye^{xy}f_{12}''+xye^{2xy}f_{22}''$$

18.【数一】解：

联立 $\begin{cases}y=x\\y=\sqrt{x}\end{cases}$ 得：$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$，

$$I=\iint_D xyd\sigma=\int_0^1 xdx\int_x^{\sqrt{x}}ydy=\int_0^1 x\cdot\frac{1}{2}y^2\Big|_x^{\sqrt{x}}dx=\int_0^1 x\cdot\frac{1}{2}(x-x^2)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1(x^2-x^3)dx=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4)\Big|_0^1$$
$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{24}$$

【数二】解：

$$xy'-y=x^2$$
$$\Rightarrow y'-\frac{1}{x}y=x$$
$$\Rightarrow y=e^{-\int-\frac{1}{x}dx}(\int xe^{\int-\frac{1}{x}dx}dx+C)$$
$$=e^{\ln|x|}(\int xe^{-\ln|x|}dx+C)$$
$$=x(\int x\cdot\frac{1}{x}dx+C)$$
$$=x(\int dx+C)$$
$$=x(x+C)$$

将 $y(0)=0$ 代入得：$C=0$， $\therefore y=x^2$

19.解：

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&-1\\2&3&-1&1\\3&5&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&-2\\0&1&-3&-1\\0&2&-6&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&-2\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&-2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&6\\0&1&0&-4\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

同解方程组为$\begin{cases}x_1+6x_4=0\\x_2-4x_4=0\\x_3-x_4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-6x_4\\x_2=4x_4\\x_3=x_4\end{cases}$

令自由未知量$x_4=1$,则 $x_1=-6$ , $x_2=4$ , $x_3=1$

$\therefore$ 该线性方程组基础解系为$\xi=\begin{pmatrix}-6\\4\\1\\1\end{pmatrix}$

通解为$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k\xi=k\begin{pmatrix}-6\\4\\1\\1\end{pmatrix}$($k$ 为任意常数).

**四、应用题(本题 10 分. 解答过程、步骤和答案必须完整、正确).**

20.【数一】解:设底面半径为$r$ ,高为$h$ ,则

$$2\pi r=\varphi R\Rightarrow r=\frac{\varphi R}{2\pi}$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\frac{\varphi^2R^2}{4\pi^2}\sqrt{R^2-\frac{\varphi^2R^2}{4\pi^2}}=\frac{\varphi^2R^3}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}$$

$$V'=\frac{2\varphi R^3}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}+\frac{\varphi^2R^3}{24\pi^2}\frac{1}{2}\frac{-2\varphi}{\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}}=\frac{2R^3\varphi\left(4\pi^2-\varphi^2\right)-R^3\varphi^3}{24\pi^2\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}}$$

令$V'=0$ 得:$\varphi=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

$\because V''\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi\right)<0$

$\therefore \varphi=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$时，容积最大.

【数二】解: 设利润为 L，由题意得，成本$C=1+2Q$

$Q=20-P\Rightarrow P=20-Q$ .

$R=PQ=(20-Q)Q=20Q-Q^2$ .

$L=R-C=20Q-Q^2-1-2Q=-Q^2+18Q-1$ .

$L'=-2Q+18$

令$L'=0$ 得: $Q=9$ .

$\because L''(9)=-2<0$

$\therefore$ 当$Q=9$时，工厂利润最大，最大利润为$L(9)=80$ 万元.

# 精通教育 2019 高等数学模拟题（七）参考答案

一、 单项选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 选对得 3 分，选错、未选或多选得 0 分).

1. D 2. B 3. C 4. D 5. B 6.A 7. 【数一】A 【数二】D 8. B

9.【数一】B 【数二】C 10. B

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分. 填对得 4 分，未填或错填得 0 分).

11. $-\frac{1}{2}$ 12. 16 13.【数一】$\int_0^1 dx\int_{x-1}^{1-x} f(x,y)dy$ 【数二】$-\frac{1}{8}$ 14. $(-2,4)$

15. $-3$

三、计算题(本大题共 4 小题, 每小题 10 分, 共 40 分. 解答过程、步骤和答案必须完整正确).

16. 解：令 $\sqrt{e^x-1}=t$，则 $e^x=t^2+1$，$x=\ln(t^2+1)$，$dx=\frac{2t}{t^2+1}dt$

$$原式=\int\frac{\ln(t^2+1)\cdot(t^2+1)}{t}\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt=2\int\ln(t^2+1)dt=2\left[t\ln(t^2+1)-\int td\ln(t^2+1)\right]$$

$$=2t\ln(t^2+1)-2\int t\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt=2t\ln(t^2+1)-4\int\frac{t^2}{t^2+1}dt=2t\ln(t^2+1)-4\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt$$

$$=2t\ln(t^2+1)-4\int 1dt+4\int\frac{1}{t^2+1}dt=2t\ln(t^2+1)-4t+4\arctan t+C$$

$$=2x\cdot\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C$$

17.解： 令 $\begin{cases}u=x^y\\v=y^x\end{cases}$，$z=f(u,v)$，所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_u'\cdot yx^{y-1}+f_v'\cdot y^x\ln y$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(f_u'\cdot yx^{y-1}+f_v'\cdot y^x\ln y\right)$$
$$=\left(f_{uu}''\cdot x^y\ln x+f_{uv}''\cdot xy^{x-1}\right)\cdot yx^{y-1}+f_u'\cdot\left(x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x\right)$$
$$+\left(f_{vu}''\cdot x^y\ln x+f_{vv}''\cdot xy^{x-1}\right)\cdot y^x\ln y+f_v'\cdot\left(xy^{x-1}\ln y+y^x\cdot\frac{1}{y}\right)$$
$$=f_{uu}''\cdot yx^{2y-1}\ln x+f_{uv}''\cdot y^xx^y\cdot(1+\ln x\ln y)+f_u'\cdot x^{y-1}(1+y\ln x)+f_{vv}''\cdot xy^{2x-1}\ln y+f_v'\cdot y^{x-1}(x\ln$$

18.【数一】解：因为 $P=x^2y-2y$，$Q=\frac{x^3}{3}-x$，所以 $\frac{\partial Q}{\partial x}=x^2-1$，$\frac{\partial P}{\partial y}=x^2-2$，

$$\oint_L(x^2y-2y)dx+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D(x^2-1-x^2+2)dxdy$$

$$=\iint_D 1dxdy=S_D=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

【数二】解：$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-y\\\frac{\partial z}{\partial y}=2y-x\end{cases}$，令 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\\frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$，得驻点 $(0,0),\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$，

对于驻点 $(0,0)$，令 $A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}=6x|_{(0,0)}=0$，$B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=-1$，$C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0,0)}=2$

得 $B^2-AC=1>0$,所以该驻点不是极值点；

对于驻点 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$，令 $A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)}=6x|_{\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)}=1$，$B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)}=-1$，

$C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)}=2$，得 $B^2-AC=-1<0$,所以该驻点是极值点，且 $A>0$，所以该驻点为极小值点，极小值 $z=-\frac{1}{432}$

19.解：增广矩阵 $B=(A|b)=\begin{pmatrix}1&-2&1&3&5\\2&1&-1&1&3\\3&4&-3&-1&1\\1&3&0&-2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&2\\0&1&0&-1&-2\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，

$r(A)=r(B)=3<4$,则方程组有无穷多解，

对应齐次线性方程组的同解方程组为 $\begin{cases}x_1+x_4=0\\x_2-x_4=0\\x_3=0\end{cases}$，

令自由未知量 $x_4=1$ ，得基础解系 $\xi=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ ，

对应齐次线性方程组的通解为 $k\xi=k\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ ；

对应非齐次线性方程组的同解方程组为 $\begin{cases}x_1+1x_4=2\\x_2-x_4=-2\\x_3=-1\end{cases}$，

令自由未知量 $x_4=0$ ，得特解 $\eta=\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\\0\end{pmatrix}$，

所以非齐次线性方程组的通解为 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k\xi+\eta=k\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\\0\end{pmatrix}$ （$k$ 为任意常数）

**四、应用题(本题 10 分. 解答过程、步骤和答案必须完整、正确).**

20.【数一】解：设深度为 $x$， $x\in[0,1]$，因为 $W=\rho gV\cdot h$，

所以 $W=\int_0^1\rho g\pi\cdot1^2\cdot xdx=\rho g\pi\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}\rho g\pi(\mathrm{J})$

所以将水全部吸出，需要做 $\frac{1}{2}\rho g\pi$ 焦耳的功.

【数二】解：根据题意得 $C(x)=2x+1$， $P=\frac{50-x}{10}$，

所以收益 $R(x)=Px\cdot(1-t)=\frac{50-x}{10}\cdot x\cdot(1-17\%)=-0.083x^2+4.15x$ （其中 $t$ 为增值税），

利润 $L(x)=R(x)-C(x)=-0.083x^2+2.15x-1$， $L'(x)=-0.166x+2.15$，

令 $L'(x)=0$，得 $x\approx13$，且 $L''(x)=-0.166<0$，所以在该点取得极大值，也是最大值，最大值 $L_{\max}\approx13$（万元），所以当 $x$ 为13时，商家利润最大，最大利润为13万元.

# 精通教育 2019 高等数学模拟题（八）参考答案

**一、 单项选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 选对得 3 分，选错、未选或多选得 0 分).**

1.D 2.B 3.C 4.D 5.D 6.A 7.B 8.C 9.D 10.A

**二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分. 填对得 4 分，未填或错填得 0 分).**

11. 【数一】$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{1}$ 【数二】1　　12. 【数一】$y=(C_1x+C_2)e^x+\frac{1}{2}e^{3x}$

【数二】$\frac{1}{x\ln x\ln\ln x}$　　13. $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$　　14. $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \\ -3 & -12 \end{pmatrix}$

15. 【数一】 $\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$ 【数二】$y^x\ln y dx+xy^{x-1}dy$

**三、计算题(本大题共 4 小题, 每小题 10 分, 共 40 分. 解答过程、步骤和答案必须完整正确).**

16.解：原式$=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=4\int_0^1\frac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{x^2}dx=4\int_0^1dx-4\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=4-4\cdot\frac{\pi}{4}=4-\pi$$

17.解：令 $u=xy^2,v=x^2y$，则 $z=f(u,v)$，由链式法则得 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_u\cdot y^2+f'_v\cdot 2xy$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(f''_{uu}\cdot 2xy+f''_{uv}\cdot x^2)\cdot y^2+f'_u\cdot 2y+\left(f''_{vu}\cdot 2xy+f''_{vv}\cdot x^2\right)\cdot 2xy+f'_v\cdot 2x$$

$$=2xy^3f''_{uu}+2yf'_u+5x^2y^2f''_{uv}+2x^3yf''_{vv}+2xf'_v$$

18.解：【数一】解：由 $P=e^x\sin y-\frac{y^2}{2},Q=e^x\cos y-\frac{1}{2}$ 及格林公式可得

$$\oint_l\left(e^x\sin y-\frac{y^2}{2}\right)dx+\left(e^x\cos y-\frac{1}{2}\right)dy=\iint_D\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy$$

$$=\iint_D\left[e^x\cos y-\left(e^x\cos y-y\right)\right]dxdy=\iint_D ydxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^3\theta d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\left(-\cos^4\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$$

【数二】解：$f(x)=\frac{1}{4(1+\frac{1}{4}x^2)}=\frac{1}{4}\frac{1}{\left[1-(-\frac{1}{4}x^2)\right]}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{4}x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{4^{n+1}}$

19.解：

$$B=\left(A|b\right)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 9 & 4 & -5 & 1 & 5 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -\frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因为 $R(A)=R(B)=2<5$，所以非齐次线性方程组有无穷多解；

1）其对应齐次同解方程组：

$\begin{cases} x_1+3x_2-\frac{7}{5}x_4-\frac{1}{5}x_5=0 \\ x_3-\frac{1}{5}x_4+\frac{2}{5}x_5=0 \end{cases}$，取 $x_2,x_4,x_5$ 为自由未知量，令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

得基础解系：$\xi_1=\begin{pmatrix}-3\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{7}{5}\\0\\\frac{1}{5}\\1\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\0\\-\frac{2}{5}\\0\\1\end{pmatrix}$，

2）非齐次同解方程组：$\begin{cases}x_1+3x_2-\frac{7}{5}x_4-\frac{1}{5}x_5=\frac{3}{5}\\x_3-\frac{1}{5}x_4+\frac{2}{5}x_5=\frac{4}{5}\end{cases}$，取 $x_2,x_4,x_5$ 为自由未知量，

令 $\begin{pmatrix}x_2\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，得特解 $\eta=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\0\\\frac{4}{5}\\0\\0\end{pmatrix}$，

所以此方程组通解为：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-3\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}\frac{7}{5}\\0\\\frac{1}{5}\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\0\\-\frac{2}{5}\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\0\\\frac{4}{5}\\0\\0\end{pmatrix}$$（$k_1,k_2,k_3$ 为任意常数）

**四、应用题(本题 10 分. 解答过程、步骤和答案必须完整、正确).**

20.【数一】解：设经过 $x$ 小时两船相距 $S$ 公里

$S=\sqrt{(6x)^2+(75-12x)^2}$，为便于求导，令 $y=(6x)^2+(75-12x)^2$，则

$y'=360x-1800$

驻点 $x=5$, 又 $y''(5)=360>0$，故 $y$ 在 $x=5$ 取得最小值，即 $S$ 在 $x=5$ 也取得最小值，因此早晨 5 点时两船相距最近.

【数二】解：由题意得，甲产品为 $x$（百个），乙产品为 $y$（百个）时，所获得的利润

$$\begin{aligned}L(x,y)&=R(x,y)-C(x,y)=x\cdot P_{甲}+y\cdot P_{乙}-C(x,y)\\&=x(26-x)+y(40-4y)-(x^2+2xy+y^2+100)\\&=26x-2x^2+40y-5y^2-2xy-100\end{aligned}$$

此题即求 $x,y$ 取何值时，$L(x,y)$ 取得最大值，并求最大值.

$\frac{\partial L}{\partial x}=26-4x-2y,\frac{\partial L}{\partial y}=40-10y-2x$，令 $\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=0\\\frac{\partial L}{\partial y}=0\end{cases}$

解得驻点 $(5,3)$，又 $A=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=-4,B=\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=-2,C=\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=-10$

于是，$B^2-AC=4-40=-36<0,$ 且 $A=-4<0$，所以，当 $\begin{cases}x=5\\y=3\end{cases}$ 时，可获得最大利润，且最大利润为 $L(5,3)=25$ (万元).

# 精通教育2019高等数学模拟题（九）参考答案

**一、 单项选择题 (本大题共10小题, 每小题3分, 共30分. 选对得3分。选错、未选或多选得0分).**

1.D 2.A 3.D 4.C 5.B 6.B 7.B 8.C 9.【数一】D【数二】A 10.B

**二、填空题 (本大题共5小题, 每小题4分, 共20分. 填对得4分,未填或错填得0分).**

11. $2xe^{-2x^2}$ 12. $-2$ 13. 2，$(-2,2)$ 14. $\dfrac{y}{xy+y^2}dx+\dfrac{x+2y}{xy+y^2}dy$

15. 【数一】$\dfrac{53}{10}$【数二】3

**三、计算题(本大题共4小题, 每小题10分, 共40分. 解答过程、步骤和答案必须完整正确).**

16.【数一】解：对应齐次方程为 $y''+2y'+2y=0$

特征方程为 $r^2+2r+2=0$ 解得特征根 $r_{1,2}=-1\pm i$

故齐次方程通解 $Y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

令非齐次方程特解为 $y^*=e^{-x}(Ax+B)$

则 $y^{*'}=-Axe^{-x}+(A-B)e^{-x}$ $\qquad y^{*''}=Axe^{-x}+(B-2A)e^{-x}$

代回原方程 $\begin{cases}A-2A+2A=1\\ B-2A+2A-2B+2B=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=1\\ B=0\end{cases}$

则原方程通解为 $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+xe^{-x}$

【数二】解：原方程分离变量得 $\dfrac{e^x}{e^x+1}dx=-\dfrac{\sin y}{\cos y}dy$

两边同时积分得 $\ln(e^x+1)=\ln|\cos y|+C_1$

整理得 $e^x+1=C\cos y$

代入初值条件 $y|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$，有 $2=C\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，得 $C=2\sqrt{2}$

则原方程特解为 $e^x+1=2\sqrt{2}\cos y$

17.【数一】解：$\int_0^1 dy\int_y^1\dfrac{\sin x}{x}dx=\int_0^1 dx\int_0^x\dfrac{\sin x}{x}dy=\int_0^1\dfrac{\sin x}{x}xdx=\int_0^1\sin xdx=-\cos x\Big|_0^1$
$=1-\cos 1$

【数二】解：$\int_{-1}^0\dfrac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx=\int_{-1}^0\left(\dfrac{3x^4+3x^2}{x^2+1}+\dfrac{1}{x^2+1}\right)dx$

$$=\int_{-1}^0\left(3x^2+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\left(x^3+\arctan x\right)\Big|_{-1}^0=1+\frac{\pi}{4}$$

18.解：设 $u=e^{xy}$，$v=y$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_u'\cdot e^{xy}y+f_v'\cdot 0=f_u'\cdot e^{xy}y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f_u'\cdot e^{xy}x+f_v'\cdot 1=f_u'\cdot e^{xy}x+f_v'$$

19.解：增广矩阵 $B=(A|b)=\begin{pmatrix}1&1&1&\lambda\\2&3&1&\lambda+1\\1&2&0&\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&\lambda\\0&1&-1&1-\lambda\\0&0&0&\lambda-1\end{pmatrix}$

当 $\lambda\neq1$ 时无解，当 $\lambda=1$ 时有无穷多解，当 $\lambda=1$ 时，增广矩阵 $B$ 可化为

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

1）对应齐次方程组为 $\begin{cases}x_1+2x_3=0\\ x_2-x_3=0\end{cases}$ 令自由未知量 $x_3=1$

得基础解系 $\xi=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$；

2）非齐次同解方程组为$\begin{cases} x_1+2x_3=1 \\ x_2-x_3=0 \end{cases}$

令$x_3=0$得非齐次方程特解为$\eta=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

则原方程通解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$（$k$为任意常数）

**四、应用题(本题 10 分. 解答过程、步骤和答案必须完整、正确)**

20.【数一】解：由于抛物线过点$(0,0)$，所以$c=0$.又抛物线过点$(1,2)$，所以$a+b=2$，

从而抛物线方程可以写为$y=ax^2+(2-a)x$，此抛物线与$x$轴的交点为$(0,0)$，

$\left(\frac{a-2}{a},0\right)$，因此抛物线与$x$轴所围图形的面积为

$$S=\int_0^{\frac{a-2}{a}}\left[ax^2+(2-a)x\right]dx=\frac{a}{3}\left(\frac{a-2}{a}\right)^3+\frac{2-a}{2}\left(\frac{a-2}{a}\right)^2=\frac{(2-a)^3}{6a^2}$$

又$S'=\frac{-(2-a)^2(a+4)}{6a^3}$，令$S'=0$，得$a=-4$，$a=2$（舍），所以$a=-4$，$b=6$，

$c=0$.

【数二】解：总收入函数为$R=P_1Q_1+P_2Q_2=20P_1-0.2P_1^2+10P_2-0.05P_2^2$

总利润函数为

$L=R-C=28P_1-0.2P_1^2+12P_2-0.05P_2^2-1235$

由极值的必要条件，得方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial P_1}=28-0.4P_1=0 \\ \frac{\partial L}{\partial P_2}=12-0.1P_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1=70 \\ P_2=120 \end{cases}$$

当$P_1=70$，$P_2=120$时，厂家所得利润最大

最大利润为$L_{\max}=465$.

# 精通教育 2019 高等数学模拟题（十）参考答案

**一、 单项选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 选对得 3 分。选错、未选或多选得 0 分).**

1.A 2. D 3. D 4. B 5. C 6. C 7. A 8. D 9.C 10. C

**二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分. 填对得 4 分，未填或错填得 0 分).**

11. $2$ 12. $dz=2xye^{x^2y}dx+x^2e^{x^2y}dy$ 13. $[-3,3)$ 14. $\frac{3}{2}-\ln 2$

15. $-2$

**三、计算题(本大题共 4 小题, 每小题 10 分, 共 40 分. 解答过程、步骤和答案必须完整正确).**

16.解：

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}n\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]=\lim_{n\to\infty}n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}$$

17.解：令 $\sqrt{2x-1}=t$，则 $x=\frac{t^2+1}{2}$， $dx=tdt$

$$\text{原式}=\int e^t tdt=\int tde^t=te^t-\int e^t dt=te^t-e^t+C=e^{\sqrt{2x-1}}(\sqrt{2x-1}-1)+C$$

18.解： $\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f'$

同理 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}f'$

$$\therefore\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}f'+\frac{y^2}{x^2+y^2}f''=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}f'+\frac{y^2}{x^2+y^2}f''$$

19.解：增广矩阵

$$B=\left(A|b\right)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3&a\\0&1&2&2&6&3\\5&4&3&3&-1&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-2&-6&a-3\\0&1&2&2&6&3\\0&-1&-2&-2&-6&b-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&\\0&1&2&2&6&\\0&0&0&0&0&\\0&0&0&0&0&b\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 当 $a=0$ 且 $b=2$ 时，方程组有解，此时

$$B\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-5&-2\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 对应的齐次线性方程的基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

特解为： $\eta=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，

$\therefore$ 通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3+\eta=k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

（$k_1,k_2,k_3$ 为任意常数）

**四、应用题(本题 10 分. 解答过程、步骤和答案必须完整、正确)**

20.【数一】解：根据题意

总利润为$L=2x+3y-(8x^2-12xy+3y^2+2x+3y)$，且$x+y=230$，

令$F(x,y,\lambda)=2x+3y-(8x^2-12xy+3y^2+2x+3y)+\lambda(x+y-230)$

求偏导得$\begin{cases}F_x'=2-16x+12y-2+\lambda=-16x+12y+\lambda\\ F_y'=3+12x-6y-3+\lambda=12x-6y+\lambda\\ F_\lambda'=x+y-230\end{cases}$，令$\begin{cases}F_x'=0\\ F_y'=0\\ F_\lambda'=0\end{cases}$

得$x=90,y=140$，因为是实际问题，所以当甲产品生产 90 台，乙产品生产 140 台时，利润最大.

【数二】解：根据题意

总成本函数为：$C(Q)=20000+100Q$

所以总利润函数为：$L(Q)=R(Q)-C(Q)$

即$L(Q)=\begin{cases}300Q-\frac{1}{2}Q^2-20000, 0\le Q\le 400\\ 60000-100Q \quad ,Q>400\end{cases}$

令$L'(Q)=0$，得$Q=300$，$L''(300)=-1<0$，所以$Q=300$为极大值点，

即最大值点，所以当产量为300时利润最大，最大利润$L(300)=25000$元.