第一章 绪论

一、是非判断题

1、根据均匀性假设，可认为构件的泊松比在各点处都相同。 (√)

2、同一截面上正应力σ与切应力τ必相互垂直。 (√)

3、同一截面上各点的正应力σ必定大小相等，方向相同。 (×)

4、若物体内各点的应变均为零，则物体无位移。 (×)

5、平衡状态弹性体的任意部分的内力都与外力保持平衡。 (√)

6、截面法是分析应力的基本方法。 (×)

7、应变分为正应变ε和切应变γ。 (√)

8、应变为无量纲量。 (√)

9、若物体各部分均无变形，则物体内各点的应变均为零。 (√)

10、内力只作用在杆件截面的形心处。 (×)

11、杆件某截面上的内力是该截面上应力的代数和。 (×)

12、用截面法求内力时，可以保留截开后构件的任一部分进行平衡计算。(√)

13、材料力学对研究对象提出的三大假设为均匀性假设、连续性假设和线弹性假设。(×)

14、应力的量纲为力/长度。 (×)

二、填空题

1、材料力学主要研究____杆件____受力后发生的____变形____，以及由此产生的____应力，应变____。

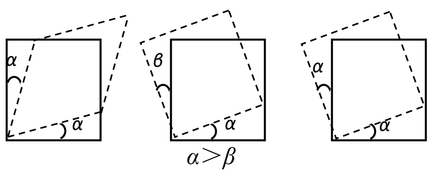
2、构件的承载能力包括____强度____，____刚度____和____稳定性____三个方面。

3、所谓____强度____，是指材料或构件抵抗破坏的能力。所谓____刚度____，是指构件抵抗变形的能力。所谓____稳定性____，是指材料或构件保持其原有平衡形式的能力。

4、根据固体材料的性能作如下三个基本假设____连续性____，____均匀性____，____各向同性____。

5、认为固体在其整个几何空间内无间隙地充满了组成该物体的物质，这样的假设称为____连续性假设____。

6、图 2 中 (a)、(b)、(c)分别为构件内某点处取出的单元体，变形后情况如虚线所示，则单元体(a)的切应变γ＝____0____；单元体(b)的切应变γ＝____$\alpha-\beta$____；单元体(c)的切应变γ＝____2α____。



(a) (b) (c)

图 2

7、构件的基本变形形式包括<u>轴向拉压</u>，<u>剪切</u>，<u>扭转</u>，<u>弯曲</u>

三、单向选择题

1．图 3 杆件发生的变形形式为（ B ）。

A、轴向拉伸　B、轴向压缩　C、弯曲　D、扭转

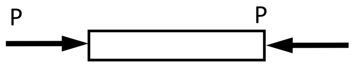


图 3

2．图 4 杆件发生的变形形式为（ C ）。

A、轴向拉伸　B、轴向压缩　C、弯曲　D、扭转

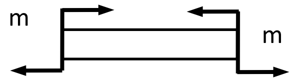


图 4

3．图 5 杆件发生的变形形式为（ D ）。

A、轴向拉伸　B、轴向压缩　C、弯曲　D、扭转

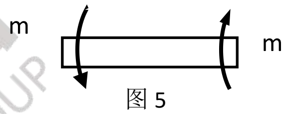
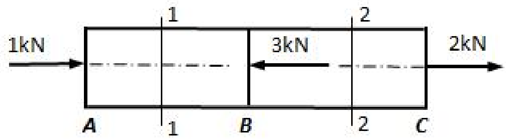


图 5

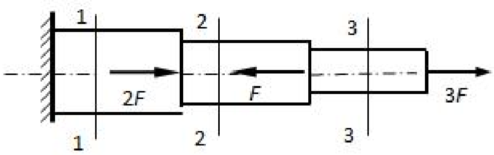
第二章 轴向拉伸与压缩

1、求图示各杆 1—1、 2—2 和 3—3 截面上的轴力。

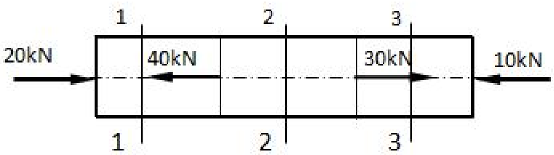
(a)



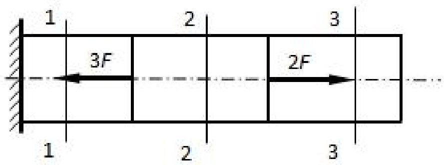
（b）



（c）



（d）



解：

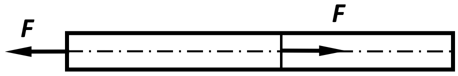
（a）N_1= －1kN，　N_2= 2kN 。

（b）N_1= 4F，　N_2=2F ，　N_3= 3F。

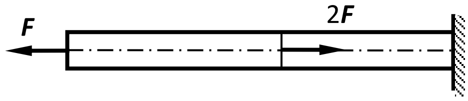
（c）N_1= －20kN，　N_2= 20kN，　N_3= －10kN 。

（d）N_1= －F，　N_2=2F，　N_3= 0。

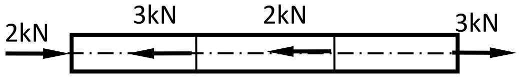
2、 画各杆的轴力图。



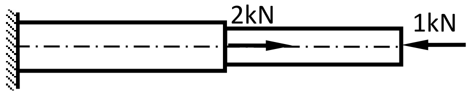
(a)



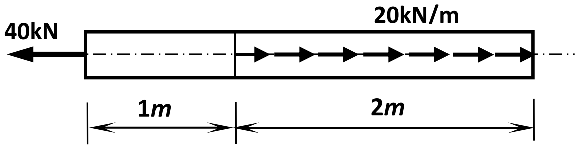
(b)



(c)



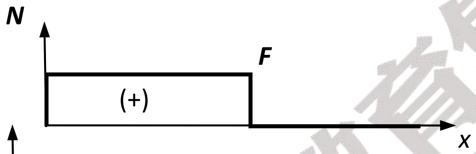
(d)



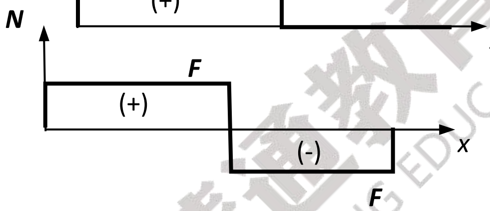
（e）

参考答案：

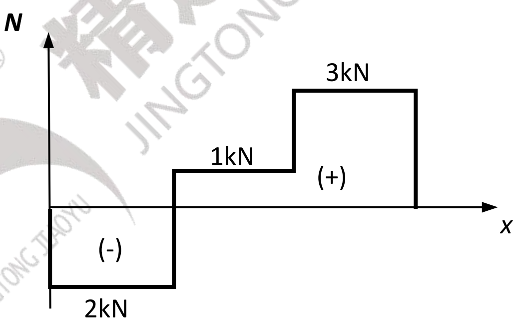
解：(a)



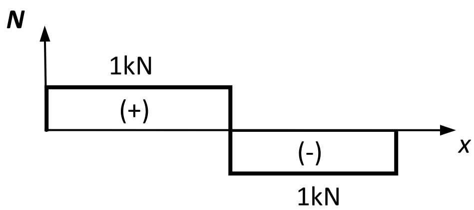
(b)



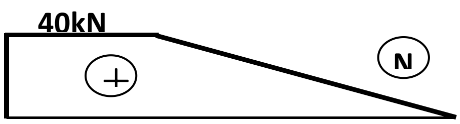
(c)



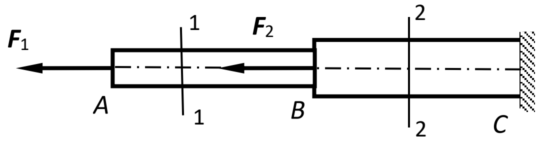
(d)



（e）



3、图示阶梯形圆截面杆，承受轴向载荷 F_1=50 kN 与 F_2 作用，*AB* 与 *BC* 段的直径分别为 d_1=20 mm 和 d_2=30 mm ，如欲使 *AB* 与 *BC* 段横截面上的正应力相同，试求载荷 F_2 之值。



解：(1) 用截面法求出 1-1、2-2 截面的轴力；

$$\mathrm{N}_1 = \boldsymbol{F}_1 \qquad \mathrm{N}_2 = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$$

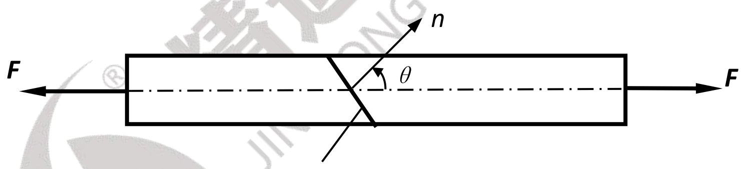
(2) 求 1-1、2-2 截面的正应力，利用正应力相同；

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \frac{\boldsymbol{N}_1}{\boldsymbol{A}_1} = \frac{50\times10^3}{\frac{1}{4}\times\boldsymbol{\pi}\times20^2} = 159.2\boldsymbol{MPa}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \frac{\mathrm{N}_2}{\boldsymbol{A}_2} = \frac{50\times10^3 + \boldsymbol{F}_2}{\frac{1}{4}\times\boldsymbol{\pi}\times30^2} = \boldsymbol{\sigma}_1 = 159.2\boldsymbol{MPa}$$

$$\therefore \boldsymbol{F}_2 = 62.5\boldsymbol{kN}$$

4、 图示木杆，承受轴向载荷 *F*=10 kN 作用，杆的横截面面积 *A*=1000 mm^2，粘接面的方位角ϑ= 45^0，试计算该截面上的正应力与切应力，并画出应力的方向。

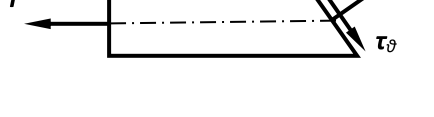


解：(1) 斜截面的应力：

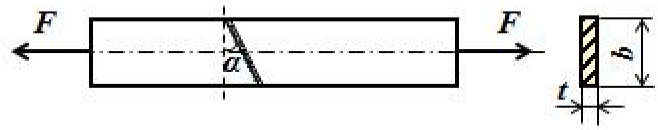
$$\boldsymbol{\sigma}_\theta = \boldsymbol{\sigma}\cos^2\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{A}}\cos^2\boldsymbol{\theta} = 5\ \boldsymbol{MPa}$$

$$\boldsymbol{\tau}_\theta = \boldsymbol{\sigma}\sin\boldsymbol{\theta}\cos\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{F}}{2\boldsymbol{A}}\sin2\boldsymbol{\theta} = 5\ \boldsymbol{MPa}$$

(2) 画出斜截面上的应力



5、图示由斜焊缝焊接而成的钢板受拉力 F 作用。已知：F=20kN，b=200mm，t=10mm，α=30o。试求焊缝内的应力。



解：先计算横截面上的应力

$$s = \frac{\mathrm{N}}{A} = \frac{F}{bt} = \frac{20´\ 10^3}{0.2´\ 0.01} = 10MPa$$

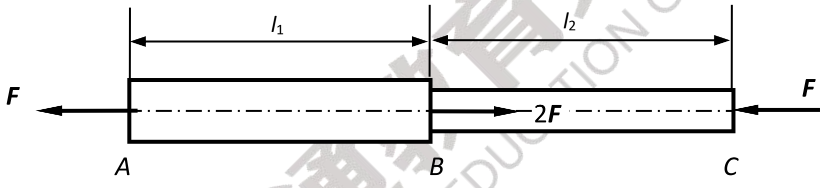
再用斜截面应力公式计算要求的应力

$$s_{30^\circ} = s\cos^2 a = 10´\ \cos^2 30^\circ = 7.5MPa$$

$$t_{30^\circ} = \frac{1}{2}s\sin 2a = \frac{1}{2}创10\quad \sin(2\quad 30^\circ)\quad 4.33MPa$$

即焊缝处的正应力为 7.5MPa，切应力为 4.33MPa。

6、 图示阶梯形杆 *AC*，*F*=10 kN，l_1= l_2=400 mm，A_1=2A_2=100 mm²，*E*=200GPa，试计算杆 *AC* 的轴向变形Δl。



解：(1) 用截面法求 AB、BC 段的轴力；

$$F_{N1} = F \qquad F_{N2} = -F$$

(2) 分段计算个杆的轴向变形；

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{F_{N1}l_1}{EA_1} + \frac{F_{N2}l_2}{EA_2} = \frac{10\times10^3\times400}{200\times10^3\times100} - \frac{10\times10^3\times400}{200\times10^3\times50}$$
$$= -0.2\ mm$$

7、已知图示拉压杆，A_1=500mm²，A_2＝200mm²， E=200GPa，试：

1）作出杆件的轴力图； 2）求各段的正应力； 3）求杆件的总变形量。

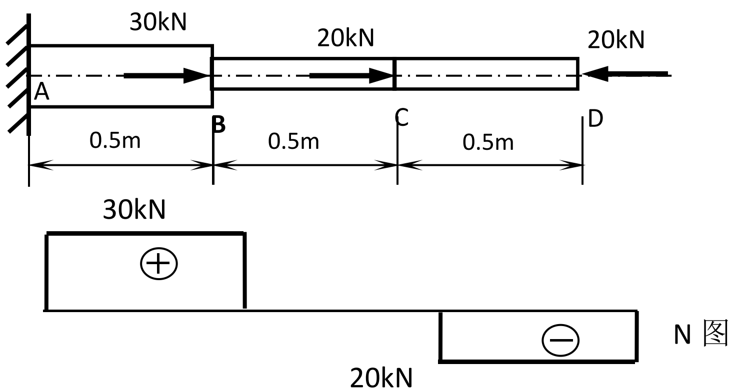
解：1）

杆件各段的轴力分别为：

N_{AB}=30KN（拉）

N_{BC}=0KN

N_{CD}=20KN（压）



轴力图如右。

2）各段正应力分别为：

$$\sigma_{AB}=\frac{N_{AB}}{A_{AB}}=\frac{30\times10^{3}}{500}=60MPa \qquad \sigma_{BC}=\frac{N_{BC}}{A_{BC}}=0MPa$$

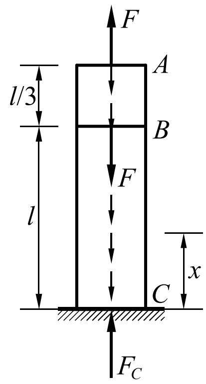
$$\sigma_{CD}=\frac{N_{CD}}{A_{CD}}=\frac{-20\times10^{3}}{200}=-100MPa$$

3）杆件的总变形为：

$$\Delta l_{AD}=\frac{N_{AB}l_{AB}}{EA_{AB}}+\frac{N_{BC}l_{BC}}{EA_{BC}}+\frac{N_{CD}l_{CD}}{EA_{CD}}$$

$$=\frac{30\times10^{3}\times500}{200\times10^{3}\times500}+\frac{-20\times10^{3}\times500}{200\times10^{3}\times200}=-0.1mm$$

8、图示等直杆，已知载荷 F，BC 段长 l，横截面面积 A，弹性模量 E，质量密度ρ，考虑自重影响。试求截面 B 的位移。



解：由整体平衡得 $F_C=\frac{4}{3}\rho gAl$

BC **段轴力** $\mathrm{N}(x)=\rho gA\left(x-\frac{4}{3}l\right)$

截面 ***B*** **的位移**

$$\varDelta_B=\Delta l_{BC}=\int_0^l\frac{\mathrm{N}(x)\,\mathrm{d}x}{EA}$$

$$=\int_0^l\frac{\rho gA\left(x-\frac{4}{3}l\right)}{EA}\mathrm{d}x=-\frac{5\rho gl^2}{6E}\quad(\downarrow)$$

9、一根截面边长为 20mm，杆长为 4m 的的正方形截面杆件，承受轴向拉力 F=30kN，其伸长量 $\Delta l=2\mathrm{mm}$ 。已知材料的许用应力[σ]=160Mpa。求材料的弹性模量并校核杆件的强度。

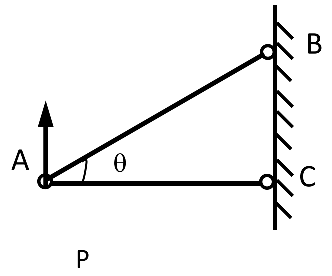
解：$\Delta l=\frac{Nl}{EA}=\frac{30\times10^{3}\times4000}{E\times20^{2}}=1.5mm$ E=200GPa

$$\sigma=\frac{N}{\mathrm{A}}=\frac{30\times10^{3}}{20^{2}}=150\mathrm{MPa}<[\sigma]$$

故强度满足。

10、在图示结构中，AB 和 AC 两杆的材料相同，横截面面积相同，均为 A，且$[\sigma]_t=3[\sigma]_c$，求杆系的承载能力最大时两杆的夹角θ。

解：由节点平衡分析可知



$$N_{AC}=\frac{P}{\tan\theta} \quad （拉力）$$

$$N_{AB}=\frac{P}{\sin\theta} \quad （压力）$$

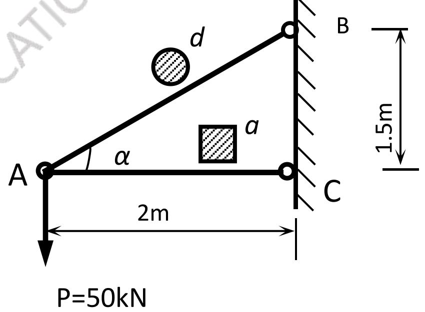
杆系的承载能力最大时，两杆同时失效，即

$$\sigma_{\mathrm{AC}}=\frac{N_{AC}}{\mathrm{A}}=\frac{P}{\mathrm{A}\tan\theta}=[\sigma_{\mathrm{t}}]$$

$$\sigma_{\mathrm{AB}}=\frac{N_{\mathrm{AB}}}{\mathrm{A}}=\frac{P}{\mathrm{A}\sin\theta}=[\sigma_{\mathrm{c}}]=3[\sigma_{\mathrm{t}}]$$

$$\theta=\arccos\frac{1}{3}$$

11、如图所示支架中杆 AB 为圆截面钢杆，直径为 d=27mm，许用应力为 $[\sigma]_1$=160Mpa；杆 AC 为正方形截面木杆，边长为 *a*=90mm，许用应力为 $[\sigma]_2$=10Mpa，荷载 P=45kN。试校核支架的强度。（10 分）

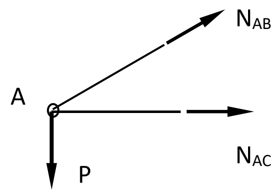


解：

由 A 节点的平衡可得：

$$N_{AB}\cos\alpha+N_{AC}=0$$

$$N_{AB}\sin\alpha-P=0$$



解得：$N_{AB}=45\times\frac{5}{3}=75\mathrm{k}N \qquad N_{AC}=-45\times\frac{4}{3}=-60\mathrm{k}N$

AB 杆的强度校核：

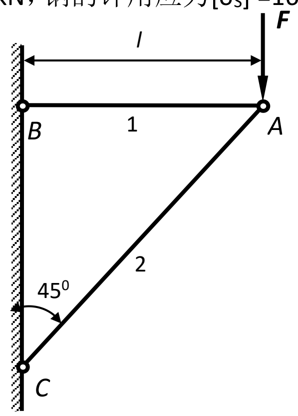
$$\sigma_{AB}=\frac{N_{AB}}{A_1}=\frac{75\times10^3}{\frac{\pi}{4}d^2}=131.02\mathrm{MPa}\le[\sigma]_1=160MPa$$

AC 杆的强度校核：

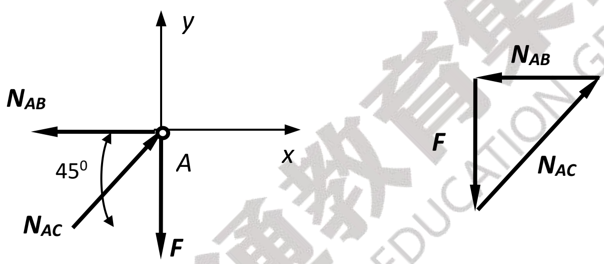
$$\sigma_{AC}=\frac{N_{AC}}{A_2}=\frac{60\times10^3}{a^2}=7.41\mathrm{MPa}\le[\sigma]_2=100MPa$$

故支架安全。

12、 图示桁架，杆 1 为圆截面钢杆，杆 2 为方截面木杆，在节点 A 处承受铅直方向的载荷 F 作用，试确定钢杆的直径 d 与木杆截面的边宽 b。已知载荷 F=50 kN，钢的许用应力[σ_S] =160 MPa，木的许用应力[σ_W] =10 MPa。



解：(1) 对节点 *A* 受力分析，求出 *AB* 和 *AC* 两杆所受的力；



$$N_{AC} = \sqrt{2}\boldsymbol{F} = 70.7\boldsymbol{kN} \qquad N_{AB} = \boldsymbol{F} = 50\boldsymbol{kN}$$

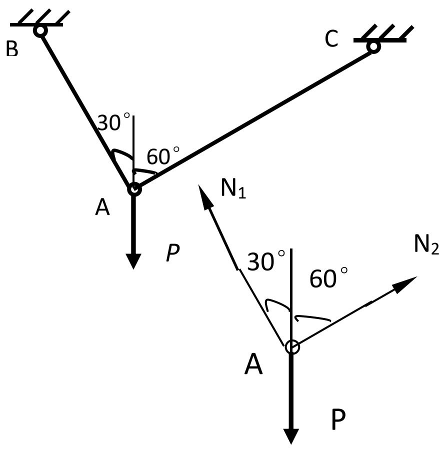
(2) 运用强度条件，分别对两杆进行强度计算；

$$\boldsymbol{\sigma}_{AB} = \frac{\mathrm{N}_{AB}}{\boldsymbol{A}_1} = \frac{50\times10^3}{\frac{1}{4}\boldsymbol{\pi d}^2} \le [\boldsymbol{\sigma}_S] = 160\boldsymbol{MPa} \qquad \boldsymbol{d} \ge 20.0\boldsymbol{mm}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{AC} = \frac{\mathrm{N}_{AC}}{\boldsymbol{A}_2} = \frac{70.7\times10^3}{\boldsymbol{b}^2} \le [\boldsymbol{\sigma}_W] = 10\boldsymbol{MPa} \qquad \boldsymbol{b} \ge 84.1\boldsymbol{mm}$$

所以可以确定钢杆的直径为 20 mm，木杆的边宽为 84 mm。

13、图示结构，在 A 点作用竖直向下的力 *P*。已知杆 AB 的直径 d_1=40mm，$[\sigma]_1$=120MPa；杆 AC 的直径 d_2=30mm，$[\sigma]_2$=150MPa，求结构的许可荷载[*P*]。



解：

解：（1）由节点 A 的平衡可知：

$$\sum X = -N_1\sin30^\circ + N_2\sin60^\circ = 0$$

$$\sum Y = N_1 \cos 30^\circ + N_2 \cos 60^\circ - P = 0$$

$$\therefore \quad N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} P = 0.866P$$
$$N_2 = 0.5P$$

（2）强度计算

由 AB 杆的强度条件：

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} \le [\sigma]_1$$

$$\Rightarrow [N_1] = A_1[\sigma]_1 = \frac{\pi}{4} \times 40^2 \times 120 = 150.72\text{k}N$$

$$\therefore [P]_1 = {[N]}/{0.866} = {150.72}/{0.866} = 174.04\text{k}N$$

由 AC 杆的强度条件：

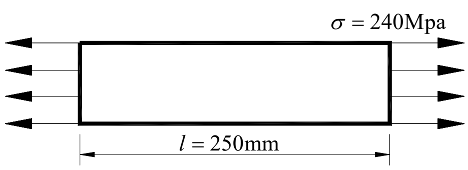
$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} \le [\sigma]_2$$

$$\Rightarrow [N_2] = A_2[\sigma]_2 = \frac{\pi}{4} \times 30^2 \times 150 = 105.98\text{k}N$$

$$\therefore [P]_2 = {[N]_2}/{0.5} = {105.98}/{0.5} = 211.96\text{k}N$$

$$\therefore [P] = \min\{[P]_1, [P]_2\} = 174.04\text{k}N$$

14、如下图所示，等直钢杆均匀拉伸，已知钢的弹性模量 E=200GPa，杆的总伸长量△l＝5mm，求此时杆的塑性伸长量。

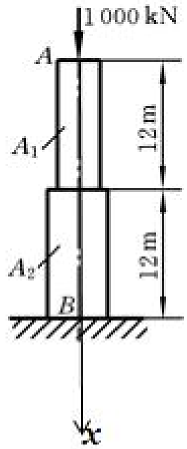


解：由题知，$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{240}{200 \times 10^3} = 0.0012$

弹性伸长量：$\Delta l_e = l\varepsilon = 0.0012 \times 250 = 0.3mm$

塑性伸长量：$\Delta l_p = \Delta l - \Delta l_e = 5 - 0.3 = 4.7mm$

15、已知混凝土的密度ρ=2.25×103kg/m³，许用压应力[σ]=2MPa。试按强度条件确定图示混凝土柱所需的横截面面积 A_1 和 A_2。若混凝土的弹性模量 E=20GPa，试求柱顶 A 的位移。



解：混凝土柱各段轴力分别为：

$$F_{N1}=-F-\rho g A_1 x \qquad F_{N2}=-F-\rho g A_1 l_1-\rho g A_2(x-l_1)$$

混凝土柱各段危险截面分别为柱中截面和柱底截面，其轴力分别为：

$$F_{N1\max}=F+\rho g A_1 l_1 \qquad F_{N2\max}=F+\rho g(A_1 l_1+A_2 l_2)\ \text{(受压)}$$

由强度条件：$\dfrac{F_{N\max}}{A}\le[\sigma]$

$$A_1\ge\frac{F}{[\sigma]-\rho g l_1}=\frac{1000\times10^3}{2\times10^6-2.25\times10^3\times9.8\times12}(m^2)=0.576m$$

取 $A_1=0.576m^2$

$$A_2\ge\frac{F+\rho g A_1 l_1}{[\sigma]-\rho g l_2}=\frac{1000\times10^3+2.25\times10^3\times9.8\times12\times0.576}{2\times10^6-2.25\times10^3\times9.8\times12}(m^2)=0.664m^2$$

取 $A_2=0.664m^2$

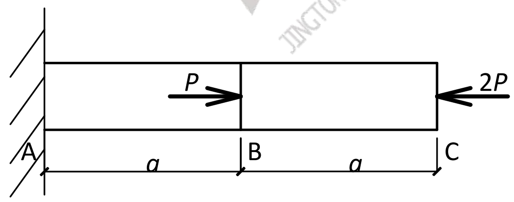
柱底固定，则柱顶位移值等于柱的伸缩量，可用叠加原理计算：

$$\Delta_A=\Delta l=\sum\Delta l_i=\sum\int_{l_i}\frac{F_{Ni}\mathrm{d}x}{EA_i}=\frac{Fl_1}{EA_1}+\frac{\rho g l_1^2}{2E}+\frac{(F+\rho g A_1 l_1)l_2}{EA_2}+\frac{\rho g l_2^2}{2E}$$

$$=\frac{1000\times10^3\times12}{20\times10^9\times0.576}+\frac{2.25\times10^3\times9.8\times12\times12}{2\times20\times10^9}$$

$$+\frac{(1000+2.25\times9.8\times0.576\times12)\times10^3\times12}{20\times10^9\times0.664}+\frac{2.25\times10^3\times9.8\times12\times12}{2\times20\times10^9}=2.242mm$$ 解：

16、抗拉刚度为 *EA* 的直杆，受力如下图，求 C 截面的位移△c。



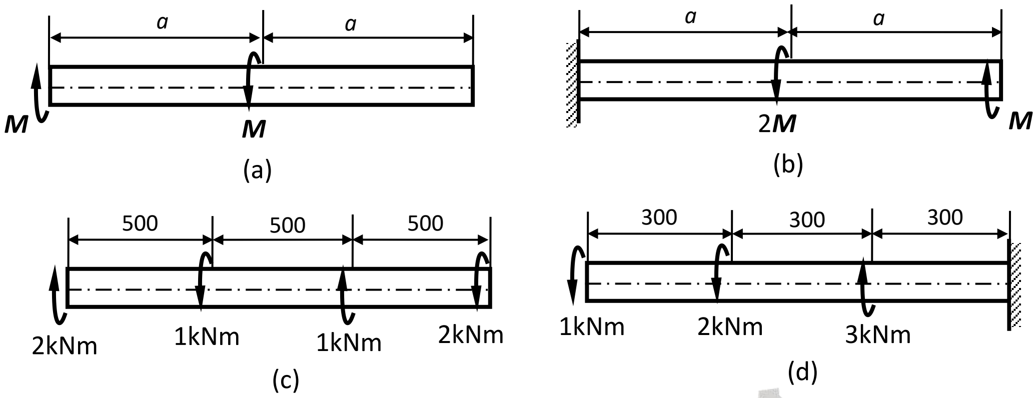
由截面法知，$N_{AB}=-P$；$N_{BC}=-2P$

$$\Delta_{AB}=\frac{N_{AB}a}{EA}=-\frac{Pa}{EA}；\quad \Delta_{BC}=\frac{N_{BC}a}{EA}=-\frac{2Pa}{EA}$$

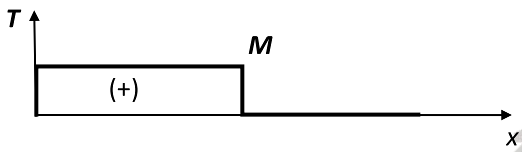
$$\Delta_C=\Delta_{AB}+\Delta_{BC}=-\frac{3Pa}{EA}$$

第三章　扭转

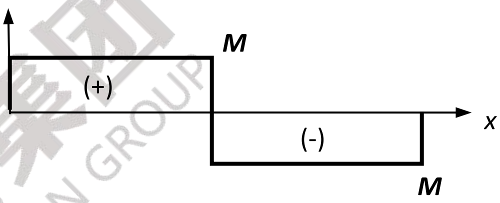
1 试求图示各轴的扭矩，并画出扭矩图。



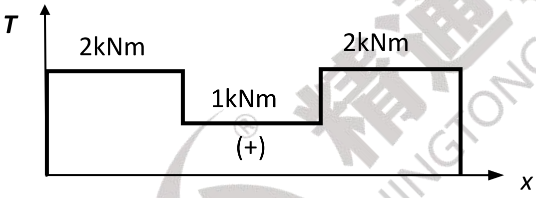
解：(a)



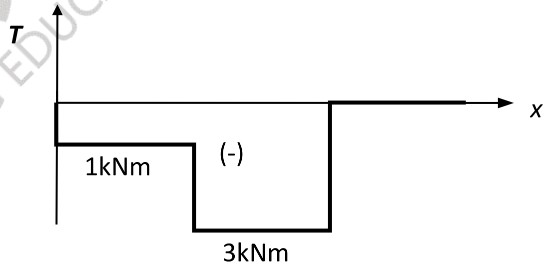
(b)



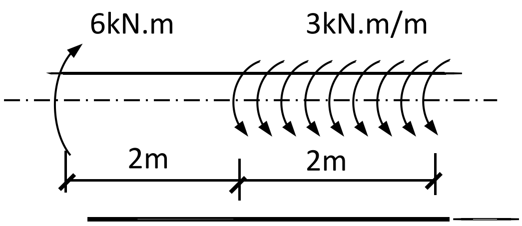
(c)



(d)



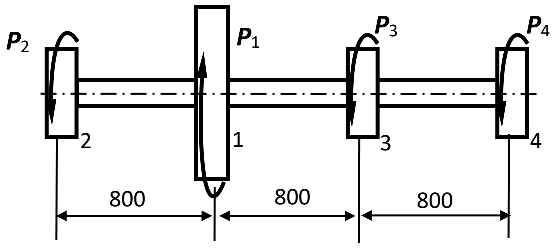
2、作图示杆件的扭矩图。



3 某传动轴，转速 n=300 r/min(转/分)，轮 1 为主动轮，输入的功率 P_1=50 kW，轮 2、轮 3 与轮 4 为从动轮，输出功率分别为 P_2=10 kW，P_3=P_4=20 kW。

(1) 试画轴的扭矩图，并求轴的最大扭矩。

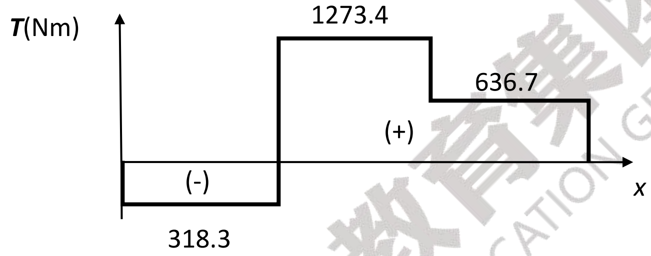
(2) 若将轮 1 与论 3 的位置对调，轴的最大扭矩变为何值，对轴的受力是否有利。



解：(1) 计算各传动轮传递的外力偶矩；

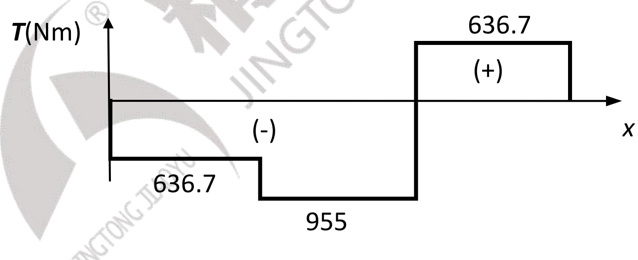
$$\boldsymbol{M}_1=9550\frac{\boldsymbol{P}_1}{\boldsymbol{n}}=1591.7\boldsymbol{Nm}\quad \boldsymbol{M}_2=318.3\boldsymbol{Nm}\quad \boldsymbol{M}_3=\boldsymbol{M}_4=636.7\boldsymbol{Nm}$$

(2) 画出轴的扭矩图，并求轴的最大扭矩；



$$\boldsymbol{T}_{\max}=1273.4\ \boldsymbol{kNm}$$

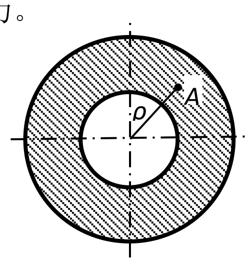
(3) 对调论 1 与轮 3，扭矩图为；



$$\boldsymbol{T}_{\max}=955\ \boldsymbol{kNm}$$

所以对轴的受力有利。

4、图示空心圆截面轴，外径 D=40 mm，内径 d=20 mm，扭矩 T=1 kNm，试计算 A 点处(ρ_A=15 mm)的扭转切应力τ_A，以及横截面上的最大与最小扭转切应力。



解：(1) 计算横截面的极惯性矩；

$$I_p=\frac{\pi}{32}(D^4-d^4)=2.356\times10^5\ mm^4$$

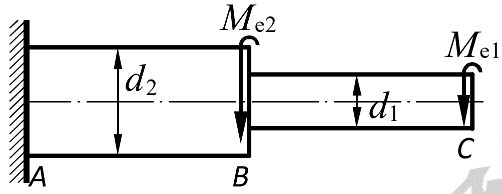
(2) 计算扭转切应力；

$$\tau_A=\frac{T\rho_A}{I_\rho}=\frac{1\times10^6\times15}{2.356\times10^5}=63.7\ MPa$$

$$\tau_{\max}=\frac{T\rho_{\max}}{I_\rho}=\frac{1\times10^6\times20}{2.356\times10^5}=84.9\ MPa$$

$$\tau_{\min}=\frac{T\rho_{\min}}{I_\rho}=\frac{1\times10^6\times10}{2.356\times10^5}=42.4\ MPa$$

5、 如图示采用同一材料制成的阶梯形圆轴，已知圆轴直径 $d_2=2d_1$，若使两段内单位长度扭转角相等，则 M_{e2}/M_{e1} 的比值为多少？



解：

$$T_{AB}=M_{e1}+M_{e2}\qquad T_{Bc}=M_{e1}$$

$$\frac{T_{AB}}{GI_{PAB}}=\frac{T_{BC}}{GI_{PBC}}$$

$$\frac{M_{e1}+M_{e2}}{G\frac{\pi}{32}d_2^4}=\frac{M_{e1}}{G\frac{\pi}{32}d_1^4}$$

解得：

$$M_{e2}=15M_{e1}$$

6、在相同的强度条件下，用内外径之比 $d/D=0.5$ 的空心圆轴取代实心圆轴，可节省材料的百分比为多少？

解：设空心轴内外直径分别为 d_2,D_2，实心轴直径为 d_1

$$\frac{T}{\frac{\pi}{16}d_1^{\ 3}}=\frac{T}{\frac{\pi}{16}D_2^{\ 3}(1-\alpha^4)}\quad\Rightarrow\quad\frac{D_2}{d_1}=\sqrt[3]{\frac{1}{1-\alpha^4}}=1.02$$

节省材料 $$\frac{A_1-A_2}{A_1}=1-\frac{D_2^{\ 2}(1-\alpha^2)}{d_1^{\ 2}}=21.7\%$$

7、直径 $d=25$ mm 的钢圆杆受轴向拉力 60 kN 作用时，在标距 0.2 m 的长度内伸长了 0.113 mm，受扭转力偶矩 0.15 kN·m 作用时，相距 0.2 m 两截面的相对扭转角为 0.55°，求钢材的弹性模量 E、切变模量 G 和泊松比 ν。

解：$\varepsilon=\dfrac{\Delta l}{l}=5.65\times10^{-4}$，　$\sigma=\dfrac{F_{\mathrm{N}}}{A}=122.2\ \mathrm{MPa}$

则 $E=\sigma/\varepsilon=216\ \mathrm{GPa}$

$$\tau=\frac{T}{W_{\mathrm{p}}}=48.89\ \mathrm{MPa}, \qquad \gamma=\frac{d/2}{l}\phi\times\frac{\pi}{180}=6\times10^{-4}\ \mathrm{rad}$$

解得 $G=81.5\ \mathrm{GPa}$

又 $G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$，得 $\nu=0.32$

8、圆轴的直径 $d=50mm$，转速为 120r/min。若该轴横截面上的最大切应力等于 60 MPa，试问所传递的功率为多大？

解：（1）计算圆形截面的抗扭截面模量：

$$W_p=\frac{1}{16}\pi d^3=\frac{1}{16}\times3.14159\times50^3=24544(mm^3)$$

（2）计算扭矩

$$\tau_{\max}=\frac{T}{W_p}=60N/mm^2$$

$$T=60N/mm^2\times24544mm^3=1472640N\cdot mm=1.473(kN\cdot m)$$

（3）计算所传递的功率

$$T=M_e=9.549\frac{N_k}{n}=1.473(kN\cdot m)$$

$$P_k=1.473\times120/9.549=18.5(kW)$$

9、某小型水电站的水轮机容量为 50 kW，转速为 300r/min，钢轴直径为 75mm，若在正常运转下且只考虑扭矩作用，其许用切应力 $[\tau]=20MPa$。试校核轴的强度。

解：（1）计算最大工作切应力

$$\tau_{\max}=\frac{M_e}{W_p}=\frac{T}{W_p}$$

式中，$M_e=9.549\dfrac{N_k}{n}=9.549\times\dfrac{50}{300}=1.592(kN\cdot m)$；

$$W_p=\frac{1}{16}\pi d^3=\frac{1}{16}\times3.14159\times75^3=12566(mm^3)。$$

故：$\tau_{\max}=\dfrac{M_e}{W_p}=\dfrac{1592000N\cdot mm}{82835mm^3}=19.219MPa$

（2）强度校核

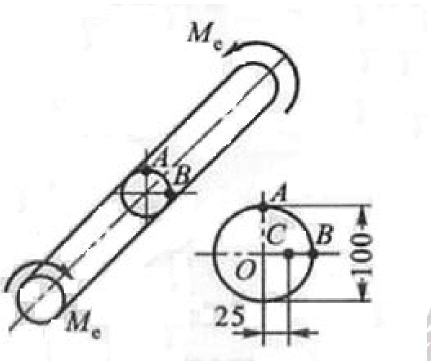
因为$\tau_{\max}=19.219MPa$，$[\tau]=20MPa$，即$\tau_{\max}\le[\tau]$，所以轴的强度足够，不会发生破坏。

10、实心圆轴的直径$d=100mm$，长$l=1m$，其两端所受外力偶矩$M_e=14kN\cdot m$，材料的切变模量$G=80GPa$。试求：

（1）最大切应力及两端面间的相对转角；

（2）图示截面上 A、B、C 三点处切应力的数值及方向；

（3）C 点处的切应变。



解：（1）计算最大切应力及两端面间的相对转角

$\tau_{\max}=\dfrac{T}{W_p}=\dfrac{M_e}{W_p}$。

式中，$W_p=\dfrac{1}{16}\pi d^3=\dfrac{1}{16}\times3.14159\times100^3=196349(mm^3)$。故：

$\tau_{\max}=\dfrac{M_e}{W_p}=\dfrac{14\times10^6N\cdot mm}{196349mm^3}=71.302MPa$

$\phi=\dfrac{T\cdot l}{GI_p}$

式中，$I_p=\dfrac{1}{32}\pi d^4=\dfrac{1}{32}\times3.14159\times100^4=9817469(mm^4)$。故：

$\phi=\dfrac{T\cdot l}{GI_p}=\dfrac{14000N\cdot m\times1m}{80\times10^9N/m^2\times9817469\times10^{-12}m^4}=0.0178254(rad)=1.02^o$

（2）求图示截面上 A、B、C 三点处切应力的数值及方向

$\tau_A=\tau_B=\tau_{\max}=71.302MPa$

由横截面上切应力分布规律可知：

$$\tau_C = \frac{1}{2}\tau_B = 0.5 \times 71.302 = 35.66MPa$$

A、B、C 三点的切应力方向如图所示。

（3）计算 C 点处的切应变

$$\gamma_C = \frac{\tau_C}{G} = \frac{35.66MPa}{80 \times 10^3 MPa} = 4.4575 \times 10^{-4} \approx 0.446 \times 10^{-3}$$

11、钢制圆轴受力如图，已知圆轴直径 d=50mm，材料的剪变模量 G=80GPa，求：（1）轴上的最大切应力；（2）杆件两端的相对扭转角。

解：杆件中的扭矩

$$T = 2kN.m$$

（1）最大剪应力

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{2 \times 10^6 \times 16}{\pi \times 50^3} = 81.53MPa$$

（2）相对扭转角

$$\phi_{AB} = \frac{Tl}{GI_P} = \frac{2 \times 10^6 \times 2 \times 10^3 \times 32}{80 \times 10^3 \times \pi \times 50^4} = 0.082rad$$

12．某实心圆轴，传递扭矩 T=2kN.m，已知材料[τ]=100MPa；[ϕ]=0.8°/m，G=80GPa，试按强度条件和刚度条件设计截面直径 d。

解：（1）由圆轴的强度条件：

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{T}{\frac{\pi d^3}{16}} \le [\tau]$$

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 2 \times 10^6}{\pi \times 100}} = 46.7mm$$

由刚度条件

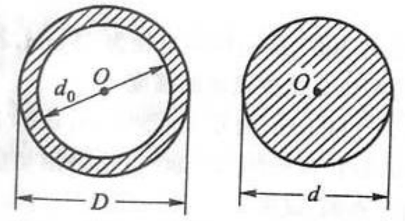
$$\varphi_{\max}=\frac{T}{GI_p}\times\frac{180}{\pi}=\frac{T}{G\frac{\pi d^4}{32}}\times\frac{180}{\pi}\le[\varphi]$$

$$d\ge\sqrt[4]{\frac{32\times180\times T}{G\pi^2[\varphi]}}=\sqrt[4]{\frac{32\times180\times2\times10^9}{80\times10^3\times\pi^2\times0.8}}=65.4mm$$

所以构件的最小直径为 d=66mm。

13、长度相等的两根受扭圆轴，一为空心圆轴，一为实心圆轴，两者的材料相同，受力情况也一样。实心轴直径为 d；空心轴的外径为 D，内径为 d_0，且 $\frac{d_0}{D}=0.8$。试求当空心轴与实心轴的最大切应力均达到材料的许用切应力（$\tau_{\max}=[\tau]$），扭矩 T 相等时的重量比和刚度比。

解：（1）求空心圆轴的最大切应力，并求 D。



习题 3－12 图

$$\tau_{\max}=\frac{T}{W_p}$$

式中，$W_p=\frac{1}{16}\pi D^3(1-\alpha^4)$，故：

$$\tau_{\max,空}=\frac{16T}{\pi D^3(1-0.8^4)}=\frac{27.1T}{\pi D^3}=[\tau]$$

$$D^3=\frac{27.1T}{\pi[\tau]}$$

（1）求实心圆轴的最大切应力

$$\tau_{\max}=\frac{T}{W_p}$$

式中，$W_p=\frac{1}{16}\pi d^3$，故：

$$\tau_{\max,实}=\frac{16T}{\pi d^3}=\frac{16T}{\pi d^3}=[\tau]$$

$$d^3=\frac{16T}{\pi[\tau]}$$

$$(\frac{D}{d})^3=\frac{27.1T}{\pi[\tau]}\cdot\frac{\pi[\tau]}{16T}=1.69375$$

$$\frac{D}{d}=1.192$$

（3）求空心圆轴与实心圆轴的重量比

$$\frac{W_{空}}{W_{实}}=\frac{0.25\pi(D^2-d_0^2)\cdot l\cdot\gamma}{0.25\pi d^2\cdot l\cdot\gamma}=(\frac{D}{d})^2(1-0.8^2)=0.36(\frac{D}{d})^2=0.36\times1.192^2=0.512$$

（4）求空心圆轴与实心圆轴的刚度比

$$I_{p空}=\frac{1}{32}\pi D^4(1-0.8^4)=0.01845\pi D^4$$

$$I_{p实}=\frac{1}{32}\pi d^4=0.03125\pi d^4$$

$$\frac{GI_{p空}}{GI_{p实}}=\frac{0.01845\pi D^4}{0.03125\pi d^4}=0.5904(\frac{D}{d})^4=0.5904\times1.192^4=1.192$$

14、如图所示阶梯圆轴，已知 d_1＝25mm，d_2＝20mm，材料的 G=80GPa，许用切应力[τ]=300MPa。试求：（1）许可外力偶矩；（2）在许可外力偶矩作用下 A，C 截面的相对扭转角。

解：由题意可知：

AB 段：T_1=2m

BC 段：T_2=m

（1）由 AB 段的强度条件：

$$\tau_{1,\ \max}=\frac{T_1}{W_{t1}}=\frac{2m}{\frac{\pi d_1^3}{16}}\le[\tau]$$

$$m_1\le[\tau]\times\frac{\pi d_1^3}{32}=300\times\frac{\pi\times25^3}{32}\times10^{-3}=460.2N.m$$

由 BC 段的强度条件

$$\tau_{2,\ \max}=\frac{T_2}{W_{t2}}=\frac{m}{\frac{\pi d_2^3}{16}}\le[\tau]$$

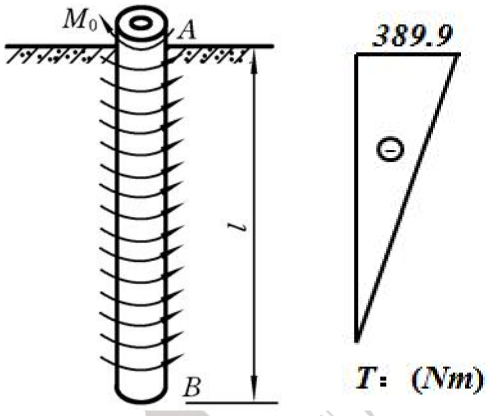
$$m_2\le[\tau]\times\frac{\pi d_2^3}{16}=300\times\frac{\pi\times20^3}{16}\times10^{-3}=471.2N.m$$

所以结构的许可外力偶矩[m]=min{m_1,m_2}=460.2N.m

（2）$\phi_{\mathrm{AC}}=\frac{T_1l_1}{GI_{P1}}+\frac{T_2l_2}{GI_{P2}}=\frac{2\times460.2\times1\times32}{80\times10^9\times\pi\times25^4\times10^{-12}}+\frac{460.2\times1\times32}{80\times10^9\times\pi\times20^4\times10^{-12}}$

$$=0.300+0.366=0.666$$

15、已知钻探机钻杆的外径 D=60mm，内径 d=50mm，功率 P=7.35kW，转速 n=180r/min，钻杆入土深度 l=40m，材料的 G=80GPa，[τ]=40MPa。假设土壤对钻杆的阻力沿长度均匀分布，试求：（1）单位长度上土壤对钻杆的阻力矩；（2）作钻杆的扭矩图，并进行强度校核；（3）A、B 两截面的相对扭转角。



解：求扭力矩：

$$M_0=9549\times\frac{7.35}{180}=389.9Nm$$

（1）设阻力矩分布集度为 m0，由钻杆的平衡条件：

$$m_0\times l=M_0\quad\Rightarrow\quad m_0=\frac{M_0}{l}=\frac{389.9}{40}=9.75Nm/m$$

（2）作扭矩图，危险截面为 A 截面：

$$\tau_{\max}=\frac{T_{\max}}{W_p}=\frac{16\times389.9}{\pi\times0.06^3\times[1-(5/6)^4]}=17.76MPa<[\tau]$$

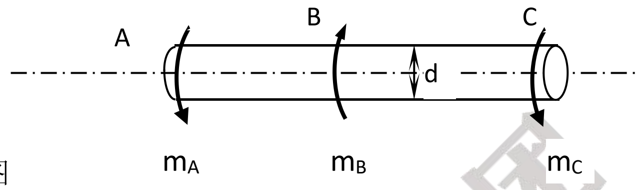
（3）如图取坐标系，有：

$$T(x)=-m_0\times x$$

$$\left|f_{AB}\right| = \left|\int_0^l \frac{T(x)}{GI_p}\mathrm{d}x\right| = \frac{m_0}{GI_p}\int_0^l x\mathrm{d}x = \frac{m_0 l^2}{2GI_p} = \frac{M_0 l}{2GI_p}$$

$$= \frac{32\times 89.9\times 40}{2\times 80\times 10^9\times \pi\times 0.06^4\times[1-(5/6)^4]} = 0.148\text{弧度} = 8.48^\circ$$

16、图示受扭圆轴，直径 d=40mm，m_A=0.4KN.m，m_B=0.9KN.m，m_C=0.5KN.m，G=80GPa，[τ]=100MPa，[ϕ]=1 °/m 。试校核该轴的强度与刚度。（11 分）



解：（1）作构件的扭矩图

（2）由扭矩图可知

$$T_{\max} = 0.5KN.m$$

强度校核：

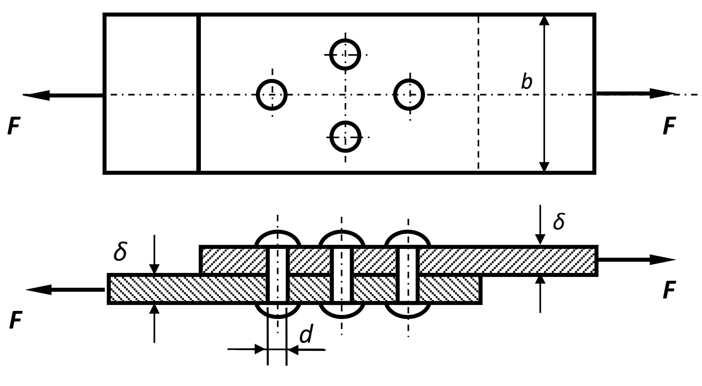
$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t} = \frac{0.5\times 10^6\times 16}{\pi\times 40^3} = 39.81MPa < [\tau]$$

刚度校核

$$\varphi_{\max} = \frac{T_{\max}}{GI_P}\times\frac{180}{\pi} = \frac{0.5\times 10^6\times 32\times 180\times 10^3}{80\times 10^3\times\pi^2\times 40^4} = 1.43^\circ/m > [\varphi] \quad ^\circ/m$$

综上，圆轴强度条件满足而刚度条件不满足，故不能安全工作。

17、图示接头，承受轴向载荷 ***F*** 作用，试校核接头的强度。已知：载荷 *F*=80 kN，板宽 *b*=80 mm，板厚*δ*=10 mm，铆钉直径 *d*=16 mm，许用应力[*σ*]=160 MPa，许用切应力[*τ*] =120 MPa，许用挤压应力[σ_{bs}] =340 MPa。板件与铆钉的材料相等。



解：(1) 校核铆钉的剪切强度；

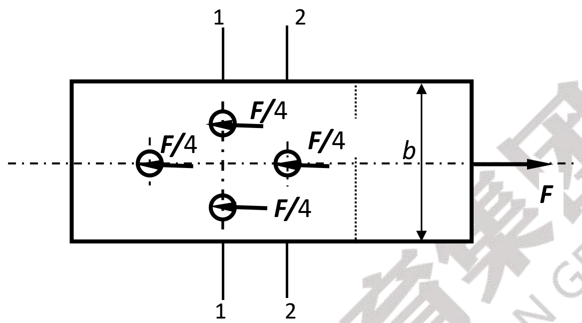
$$\tau = \frac{F_Q}{A_S} = \frac{\frac{1}{4}F}{\frac{1}{4}\pi d^2} = 99.5\ MPa \le [\tau] = 120\ MPa$$

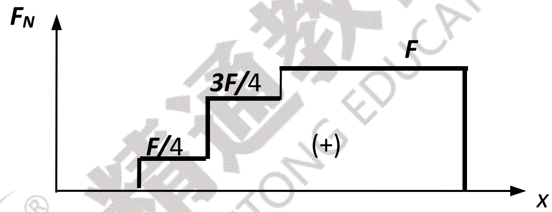
(2) 校核铆钉的挤压强度；

$$\sigma_{bs} = \frac{F_b}{A_b} = \frac{\frac{1}{4}F}{d\delta} = 125\ MPa \le [\sigma_{bs}] = 340\ MPa$$

(3) 考虑板件的拉伸强度；

对板件受力分析，画板件的轴力图；





校核 1-1 截面的拉伸强度

$$\sigma_1 = \frac{F_{N1}}{A_1} = \frac{\frac{3F}{4}}{(b-2d)\delta} = 125\ MPa \le [\sigma] \ = 160\ \mathrm{MPa}$$

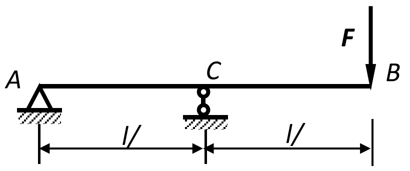
校核 2-2 截面的拉伸强度

$$\sigma_1 = \frac{F_{N1}}{A_1} = \frac{F}{(b-d)\delta} = 125\ MPa \le [\sigma] \ = 160\ \mathrm{MPa}$$

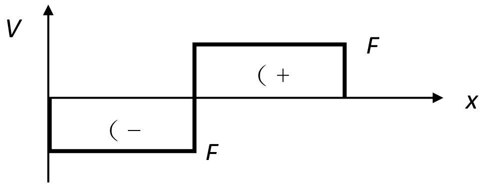
所以，接头的强度足够。

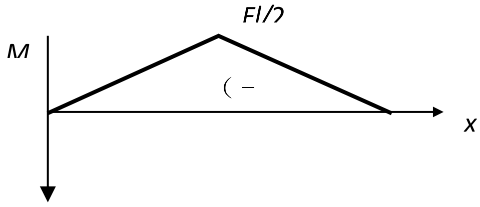
第四章　弯曲内力

1、.画剪力与弯矩图。

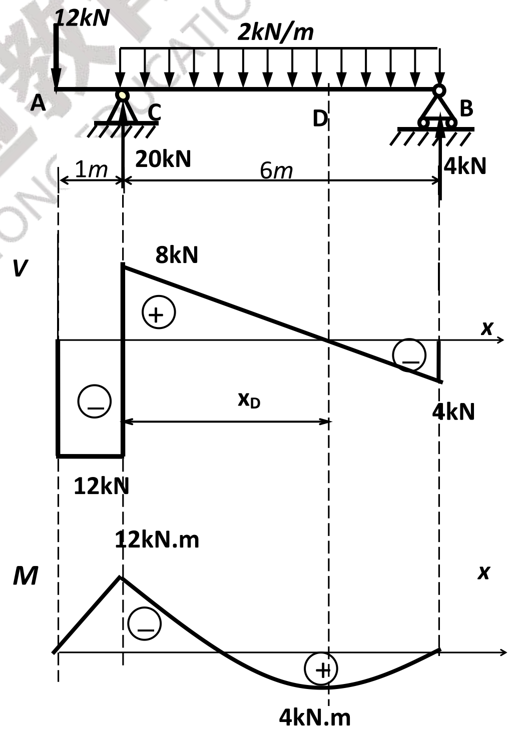


(a)





2．试做图示梁的剪力图和弯矩图，并求$|V|_{max}$和$|M|_{max}$。



解：1）求支反力

R_C=20kN

R_B=4kN

2）作 V 图

按外载走向从左向右

x_D=4m

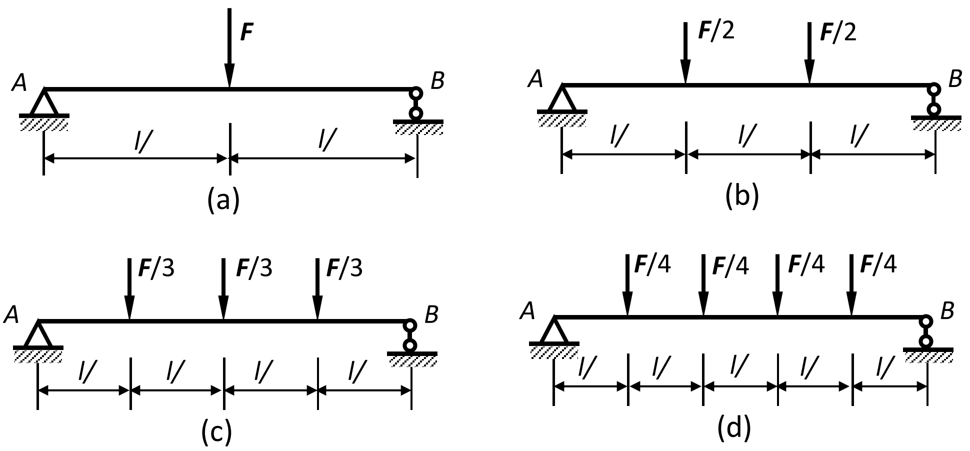
3）作 M 图

M_C=12kN.m

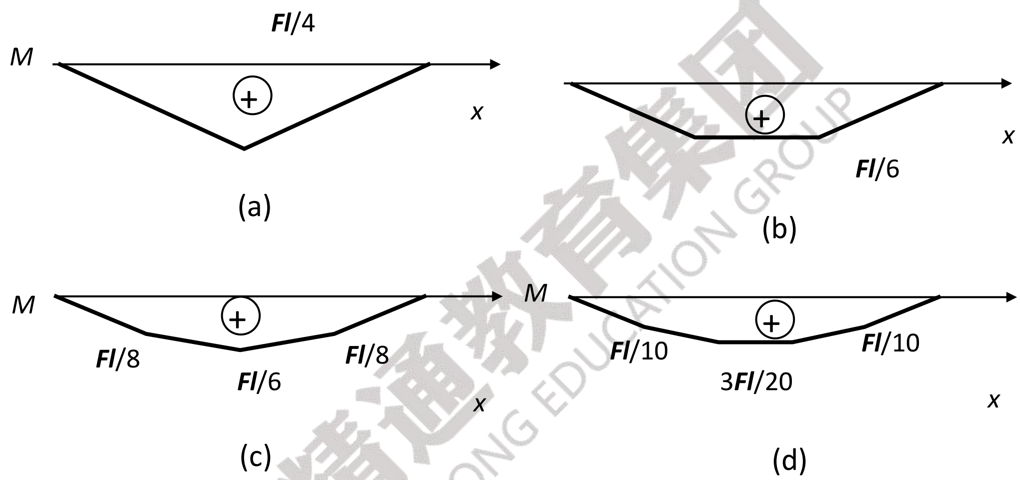
4） $|V|_{\max} = 12kN$

$|M|_{\max} = 12kN.m$

3、图示简支梁，载荷 *F* 可按四种方式作用于梁上，试分别画弯矩图，并从强度方面考虑，指出何种加载方式最好。

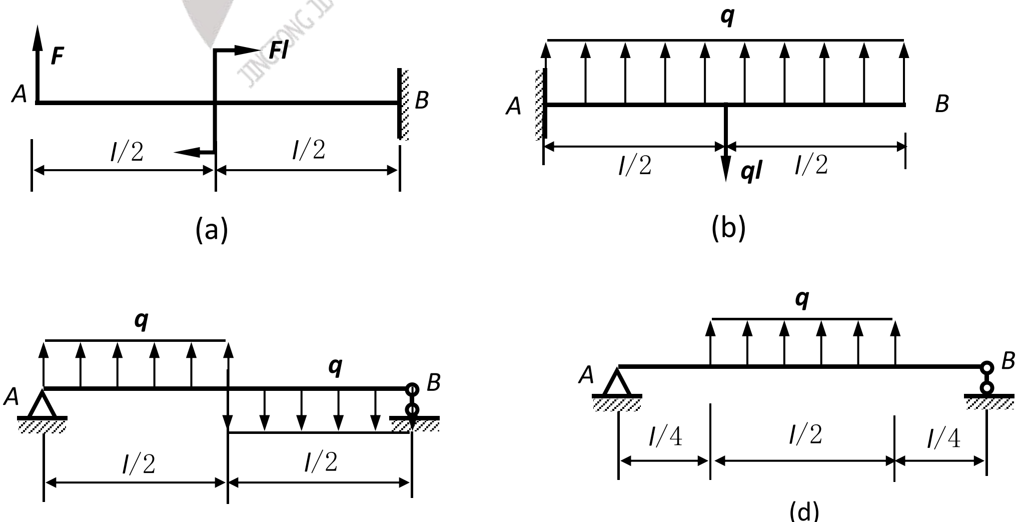


解：各梁约束处的反力均为 $F/2$，弯矩图如下：



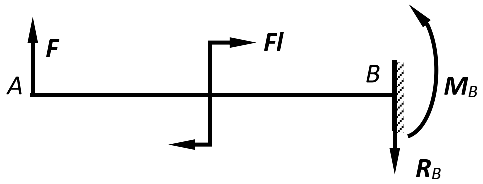
由各梁弯矩图知：(d)种加载方式使梁中的最大弯矩呈最小，故最大弯曲正应力最小，从强度方面考虑，此种加载方式最佳。

4、图示各梁，试利用剪力、弯矩与载荷集度的关系画剪力与弯矩图。



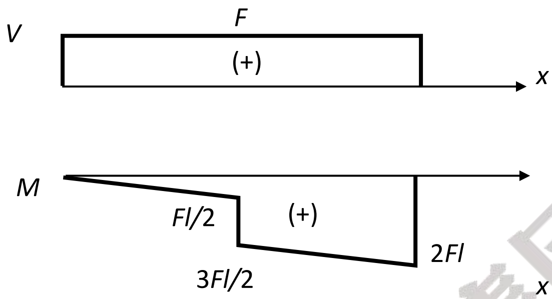
解：(a)

(1) 求约束力；



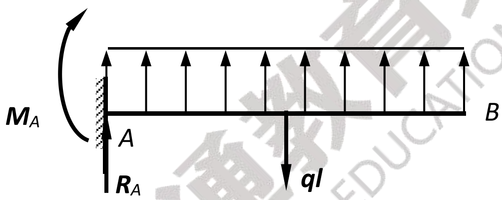
$$R_B = F \qquad M_B = 2Fl$$

(2) 画剪力图和弯矩图；



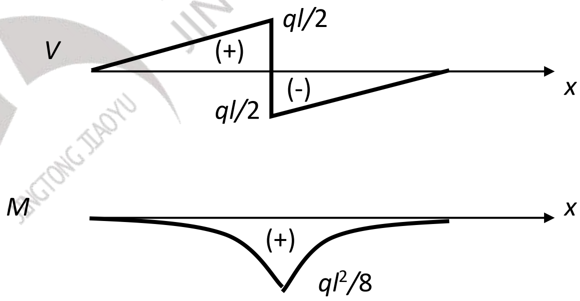
(b)

(1) 求约束力；



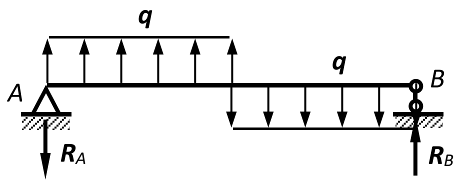
$$R_A = 0 \qquad M_A = 0$$

(2) 画剪力图和弯矩图；



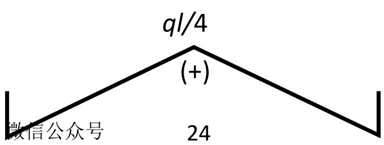
(c)

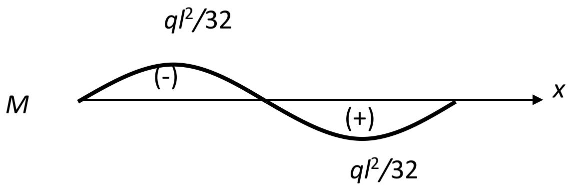
(1) 求约束力；



$$R_A = R_B = \frac{ql}{4}$$

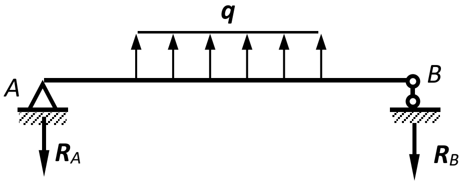
(2) 画剪力图和弯矩图；





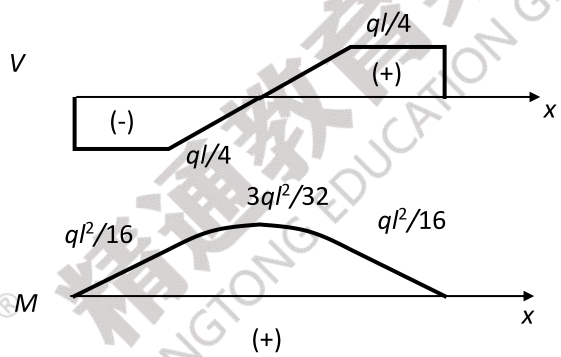
(d)

(1) 求约束力；



$$R_A = R_B = \frac{ql}{4}$$

(2) 画剪力图和弯矩图；



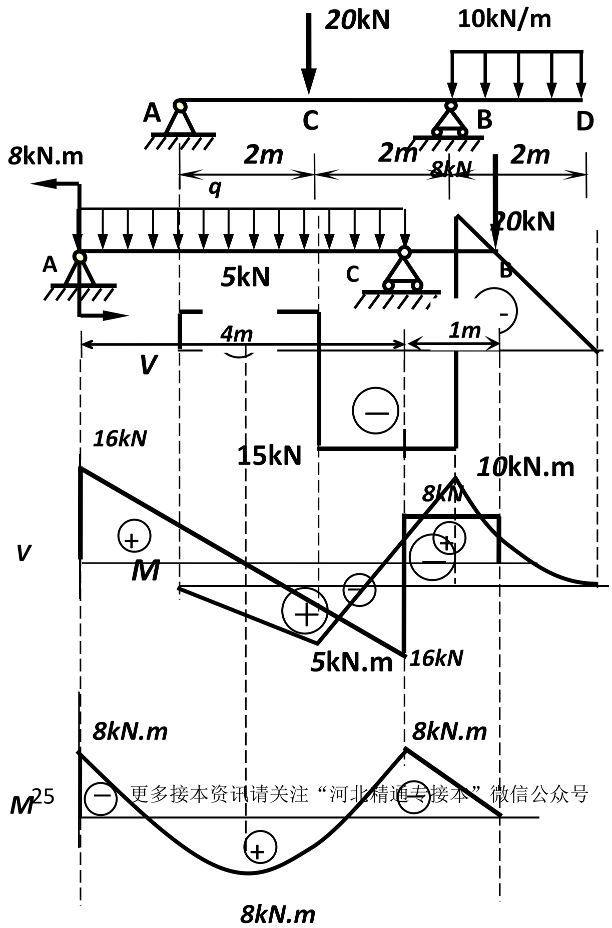
5、作图示梁的剪力图和弯矩图。

解：（1）求支反力

$R_A = 5kN(\uparrow)$　$R_B = 35kN(\uparrow)$

（2）作剪力图

（3）作弯矩图



6、作图示梁的剪力图和弯矩图。

解：

由梁的整体平衡解得：

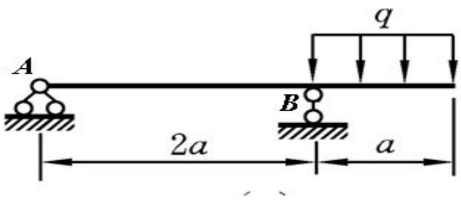
$R_{\mathrm{A}} = 16\mathrm{kN}$

$R_C = 24\mathrm{kN}$

绘剪力图如右：

弯矩图

7、作图示梁的剪力图和弯矩图。

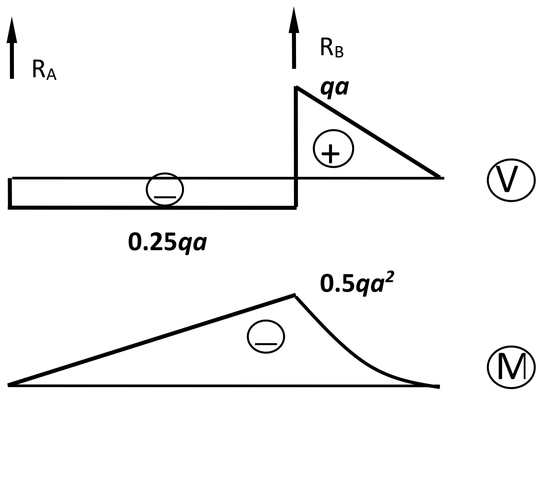


解：（1）求支反力

$$\boldsymbol{R_A} = -\frac{1}{4}\boldsymbol{qa} \quad \boldsymbol{R_B} = \frac{5}{4}\boldsymbol{qa}$$

（2）画剪力图

（3）画弯矩图



8、作图示梁的剪力图和弯矩图，并求$|V|_{max}$和$|M|_{max}$。

解：1）求支反力

$R_A = 4\text{k}N$（↑）

$R_B = 8\text{k}N$（↑）

2）作 V 图

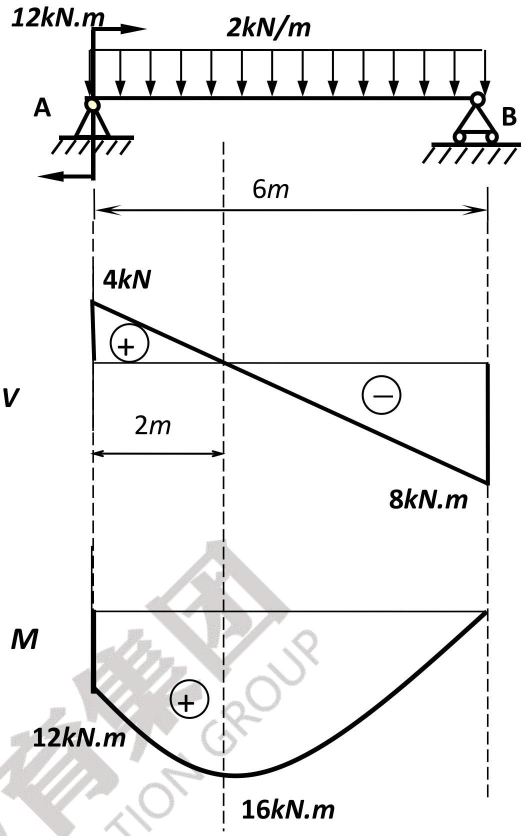
3）作 M 图

$$M_D = 12 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 16kN.m$$

4)

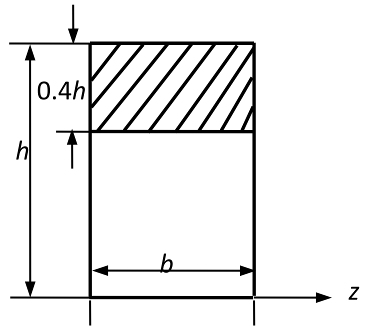
$|V|_{\max} = 8kN$

$|\text{M}|_{\max} = 16kN.\text{m}$ （2 分）

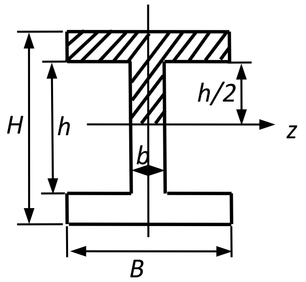


第五章　截面图形的几何性质

1、求图示平面图形中阴影部分对 z 轴的静矩。

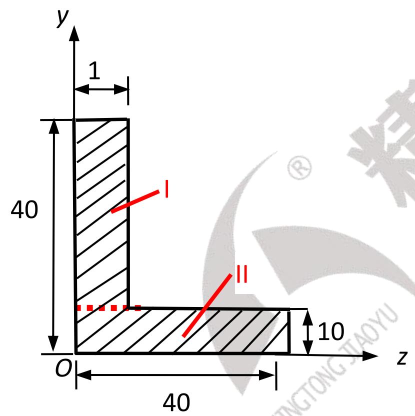


$$S_Z = b \cdot 0.4h \cdot (0.6h + 0.2h) = 0.32bh^2$$



$$S_Z = B \cdot \frac{H-h}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + \frac{H-h}{4}\right) + b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{B\left(H^2 - h^2\right)}{8} + \frac{bh^2}{8}$$

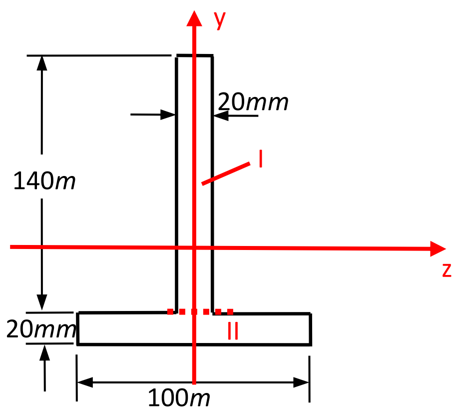
2、求图示平面图形对 z、y 轴的惯性矩。



$$I_Z = I_I + I_{II} = \frac{10 \cdot 30^3}{12} + 40 \cdot 10 \cdot 25^2 + \frac{40 \cdot 10^3}{12} + 40 \cdot 10 \cdot 5^2$$
$$= 2.23 \times 10^5 mm^4$$

由于图形对称，$I_Y = I_Z == 2.23 \times 10^5 mm^4$

3、试求图示平面图形的形心主惯性轴的位置，并求形心主惯性矩。

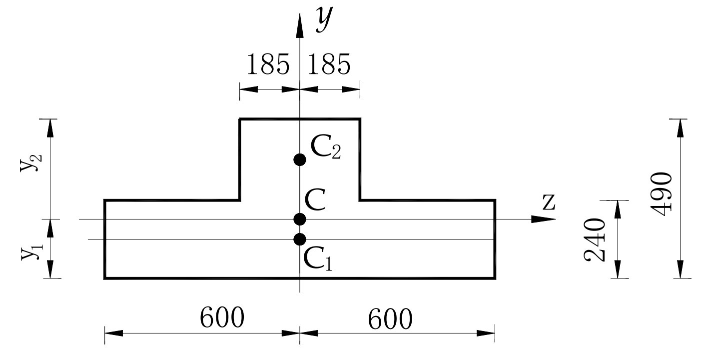


$$y_C = \frac{10 \cdot 20 \cdot 90 + 20 \cdot 100 \cdot 10}{140 \cdot 20 + 20 \cdot 100} = 56.7mm$$

$$I_Z = I_I + I_{II} = \frac{20 \cdot 140^3}{12} + 140 \cdot 20 \cdot 33.3^2 +$$
$$\frac{100 \cdot 20^3}{12} + 10.0 \cdot 20 \cdot 46.7^2 = 1.21 \times 10^7 mm^4$$

$$I_Y = \frac{140 \cdot 20^3}{12} + \frac{20 \cdot 100^3}{12} = 1.76 \times 10^6 mm^4$$

4、 图示砌体 T 形截面，当 B=1200mm,b=370mm，D=490mm 时，（1）试计算图形的形心位置参数 y_1、y_2；（2）试计算图形对形心轴和 y 轴的惯性矩及其相应的回转半径。



解：（1）计算图形的形心位置参数 y_1、y_2

建立图示坐标，则图形的形心在 y 轴上。

$$y_C = y_1 = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A} = \frac{370\times 250\times(240+\frac{250}{2}) + 240\times 1200\times 120}{370\times 250 + 240\times 1200}\text{mm} = 179.6\text{mm} = y_1$$

$$y_2 = 490 - y_1 = 490 - 179.6 = 310.4\text{mm}$$

（2）计算图形对形心轴惯性矩及其回转半径

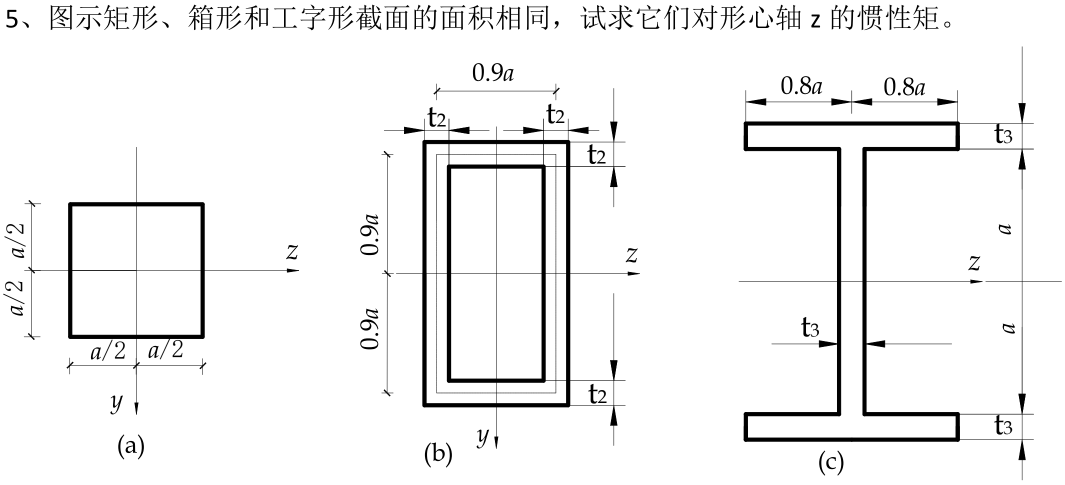
$$I_z = I_z^1 + I_z^2 = \frac{1200\times 240^3}{12} + 1200\times 240\times(179.6-\frac{240}{2})^2 + \frac{370\times 250^3}{12} + 370\times 250\times(310.4-\frac{250}{2})^2 = 6.067\times 10^9\,\text{mm}^4$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{6.067\times 10^9}{1200\times 240 + 250\times 370}} = 126.3\text{mm}$$

$$I_y = I_y^1 + I_y^2 = \frac{240\times 1200^2}{12} + \frac{(490-240)\times(185\times 2)^2}{12} = 3.562\times 10^{10}\,\text{mm}^4$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{3.562\times 10^{10}}{1200\times 240 + 250\times 370}} = 305.9\text{mm}$$

5、图示矩形、箱形和工字形截面的面积相同，试求它们对形心轴 z 的惯性矩。



题5-4图

解：（1）矩形

$$I_z=\frac{bh^3}{12}=\frac{a^4}{12}$$

（2）箱形

箱形与方形面积，即：$a^2=6bt_2=5.4at_2\rightarrow t_2=\dfrac{a}{5.4}$

$$I_z=\frac{(b+t_2)(2b+t_2)^3}{12}-\frac{(b-t_2)(2b-t_2)^3}{12}=\frac{(0.9a+\frac{a}{5.4})(1.8a+\frac{a}{5.4})^3}{12}-\frac{(0.9a-\frac{a}{5.4})(1.8a-\frac{a}{5.4})^3}{12}$$
$$=0.4567a^4$$

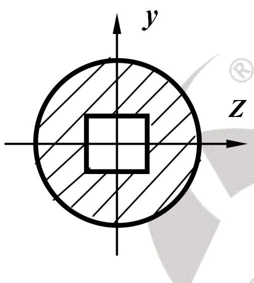
（3）工字形截，即：面 $a^2=2\times1.6at_3+2at_3\rightarrow t_3=\dfrac{a}{5.2}$

工字形截面方形面积

$$I_z=\frac{1.6a(2a+2t_3)^3}{12}-\frac{(1.6a-t_3)8a^3}{12}=\frac{1.6a(2a+2\times\frac{a}{5.2})^3}{12}-\frac{(1.6a-\frac{a}{5.2})8a^3}{12}$$
$$=0.8695a^4$$

$I_{z方}$：$I_{z箱}$：$I_{z工}=\dfrac{1}{12}$:0.4567:0.8695 = 1:5.48:10.43

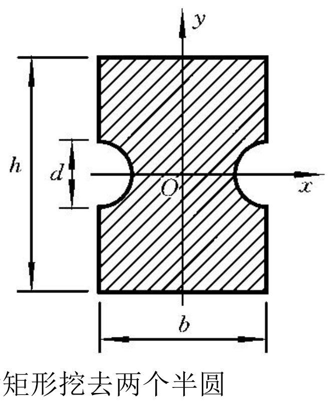
6、如图所示是一枚被称为“孔方兄”的中国古钱币，设圆的直径为d，挖去的正方形边长为b，若$b=d/2$，求该截面的弯曲截面系数W_Z。



$$I_Z=\frac{pd^4}{64}-\frac{b^4}{12}=\frac{d^4}{192}(3p-1)$$

$$W_Z=(\frac{pd^4}{64}-\frac{b^4}{12})/(d/2)=\frac{d^3}{96}(3p-1$$

7、试求图示平面图形对 x 轴和 y 轴的惯性矩。



解：组合图形，可视为矩形挖去两个半圆

$$I_x=I_{x1}-2I_{x2}=\frac{bh^3}{12}-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi d^4}{64}=\frac{bh^3}{12}-\frac{\pi d^4}{64}$$

$$=\frac{hb^3}{12}-2\cdot[(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi})\cdot\frac{d^4}{16}+(\frac{b}{2}-\frac{2d}{3\pi})^2\cdot\frac{\pi d^2}{8}]$$

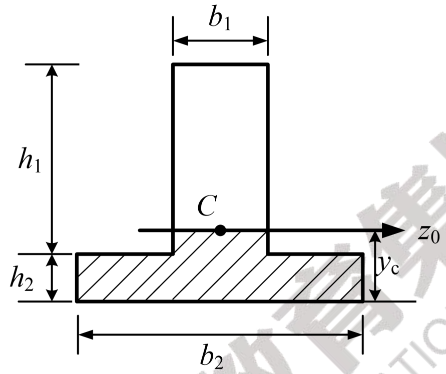
$$=\frac{hb^3}{12}-\frac{\pi d^4}{64}-\frac{\pi b^2 d^2}{16}+\frac{bd^3}{6}$$

8、在图示的对称倒 T 形截面中，$b_1=0.3$ m，$b_2=0.6$ m，$h_1=0.5$ m $h_2=0.14$ m 。

（1）求形心 C 的位置；

（2） 求阴影部分对 z_0 轴的静矩；

（3）问 z_0 轴以上部分的面积对 z_0 轴的静矩与阴影部分对 z_0 轴的静矩有何关系？



解：（1）图形的面积为

$A=0.5\times0.3+0.6\times0.14=0.234\text{m}^2$

对 Z 轴的静距为

$$S_z=\sum_{i=1}^{2}A_i\overline{y}=0.3\times0.5\times(0.25+0.14)+0.6\times0.14\times\left(0.14/2\right)=0.06438\text{m}^3$$

形心坐标为

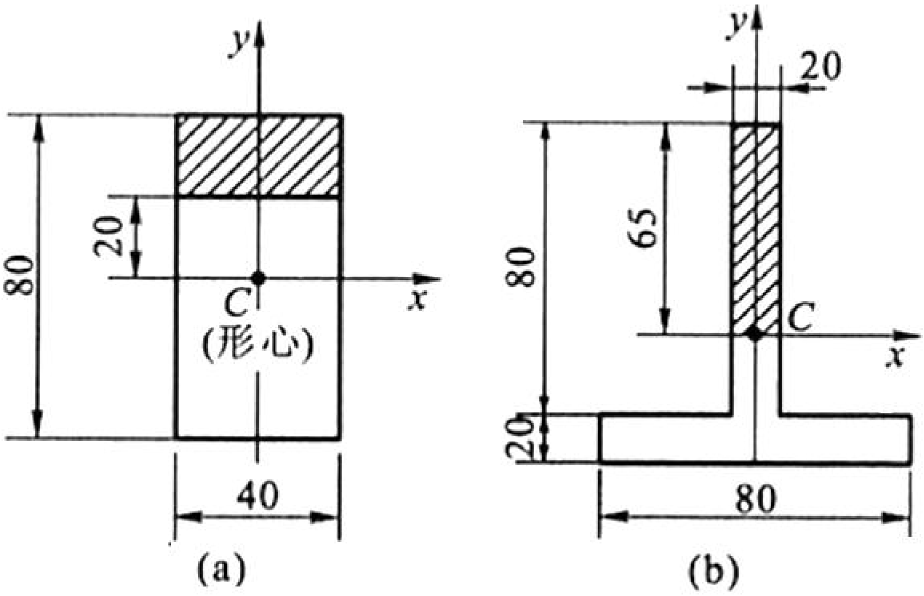
$$y_C=\frac{S_z}{A}=\frac{0.06438}{0.234}=0.275\text{m}$$

（2）求阴影部分对 z_0 轴的静距为

$$S_{z_0}=\sum_{i=1}^{2}A_i\overline{y}=0.6\times0.14\times\left(0.14/2+(0.275-0.14)\right)+0.3\times(0.275-0.14)^2\times\frac{1}{2}=2\times10^{-2}\text{m}^3$$

（3） z_0 轴以上部分的面积对 z_0 轴的静矩与阴影部分对 z_0 轴的静矩关系为：经过计算得出相等。

9、试求图示各截面的阴影线面积对 X 轴的静积。



解：（a）

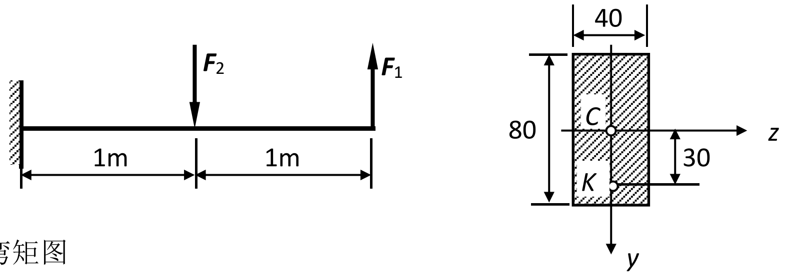
$$S_x = A \cdot y_c = (40 \times 20) \times (20 + 10) = 24000(mm^3)$$

（b）

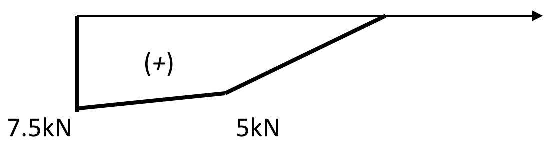
$$S_x = A \cdot y_c = (20 \times 65) \times \frac{65}{2} = 42250(mm^3)$$

第六章　弯曲应力

1、图示悬臂梁，横截面为矩形，承受载荷 F_1 与 F_2 作用，且 $F_1=2F_2=5$ kN，试计算梁内的最大弯曲正应力，及该应力所在截面上 K 点处的弯曲正应力。



解：(1) 画梁的弯矩图



(2) 最大弯矩（位于固定端）：

$$M_{\max}=7.5\ kN$$

(3) 计算应力：

最大应力：

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_Z}=\frac{M_{\max}}{\frac{bh^2}{6}}=\frac{7.5\times10^6}{\frac{40\times80^2}{6}}=176\ MPa$$

K 点的应力：

$$\sigma_K=\frac{M_{\max}\cdot y}{I_Z}=\frac{M_{\max}\cdot y}{\frac{bh^3}{12}}=\frac{7.5\times10^6\times30}{\frac{40\times80^3}{12}}=132\ MPa$$

2、把直径 d=1 m 的钢丝绕在直径为 2 m 的卷筒上，设 E=200 GPa，试计算钢丝中产生的最大正应力。

解：(1) 由钢丝的曲率半径知

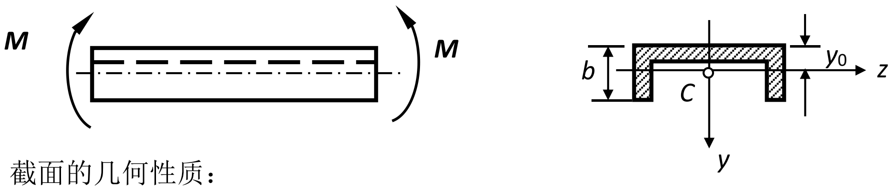
$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI}\qquad\therefore\frac{E}{\rho}=\frac{M}{I}$$

(2) 钢丝中产生的最大正应力

$$\sigma_{\max}=\frac{MR}{I}=\frac{ER}{\rho}=\frac{200\times10^9\times0.5\times10^{-3}}{1}=100\ MPa$$

3、图示梁，由 No22 槽钢制成，弯矩 M=80 N.m，并位于纵向对称面（即 x-y 平面）内。试求梁内的最大弯曲拉应力与最大弯曲压应力。

（截面的几何性质： $y_0 = 20.3\ mm \quad b = 79\ mm \quad I_z = 176\ cm^4$ ）



解：(1) 截面的几何性质：

$$y_0 = 20.3\ mm \qquad b = 79\ mm \qquad I_z = 176\ cm^4$$

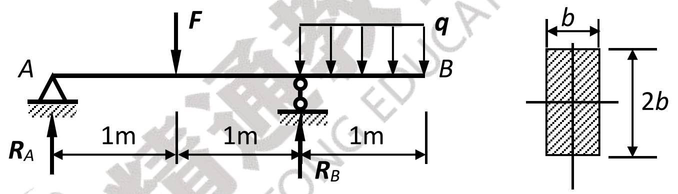
(2) 最大弯曲拉应力（发生在下边缘点处）

$$\sigma_{t\max} = \frac{M \cdot (b - y_0)}{I_x} = \frac{80 \times 10^3 \times (79 - 20.3)}{176 \times 10^4} = 2.67\ MPa$$

(3) 最大弯曲压应力（发生在上边缘点处）

$$\sigma_{c\max} = \frac{M \cdot y_0}{I_x} = \frac{80 \times 10^3 \times 20.3}{176 \times 10^4} = 0.92\ MPa$$

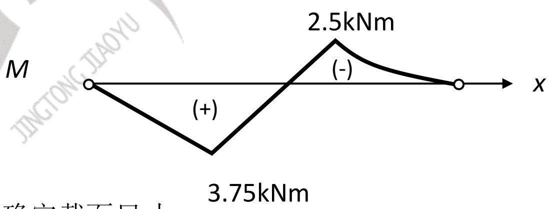
4、 图示矩形截面钢梁，承受集中载荷 ***F*** 与集度为 ***q*** 的均布载荷作用，试确定截面尺寸 *b*。已知载荷 *F*=10 kN，*q*=5 N/mm，许用应力[*σ*] =160 Mpa。



解：(1) 求约束力：

$$R_A = 3.75\ kNm \qquad R_B = 11.25\ kNm$$

(2) 画出弯矩图：



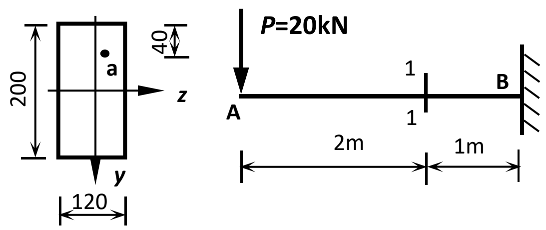
(3) 依据强度条件确定截面尺寸

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{3.75 \times 10^6}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{3.75 \times 10^6}{\frac{4b^3}{6}} \le [\sigma] = 160\ MPa$$

解得：

$$b \ge 32.7\ mm$$

5．图示矩形截面梁受集中力作用，（1）求 1-1 截面上 a 点的弯曲正应力和弯曲剪应力；（2）若材料的许用应力[σ]=30MPa，试校核此梁的正应力强度。（14 分）



解：（1）1-1 截面上的内力

$$V_1 = -20kN$$
$$M_1 = -40kN.m$$

$$\sigma_a = \frac{M_1}{I_z} y_a = \frac{-40\times10^6\times(-60)}{\frac{120\times200^3}{12}} = 30MPa$$

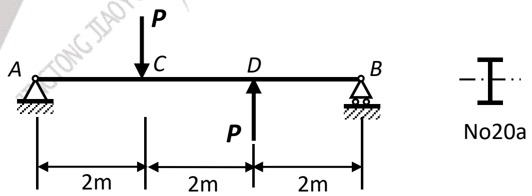
$$\tau_a = \frac{V_1 S_z^*}{I_z b} = \frac{-20\times10^3\times40\times120\times80}{\frac{120\times200^3}{12}\times120} = 0.8MPa$$

（2）全梁最大弯矩$\left|M_{\max}\right| = 60kN.m$

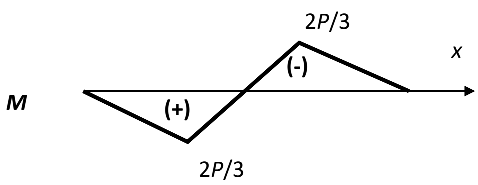
$$\sigma_{\max} = \frac{\left|M_{\max}\right|}{W_z} = \frac{60\times10^6}{\frac{120\times200^2}{6}} = 75MPa \le [\sigma]$$

故全梁的正应力强度满足。

6、 20a 工字钢梁的支承和受力情况如图所示，若[σ]=160 MPa，试求许可载荷。抗弯截面系数：$\boldsymbol{W} = 237\times10^{-6}\boldsymbol{m}^3$



解：(1) 画梁的弯矩图



由弯矩图知：

$$\boldsymbol{M}_{\max} = \frac{2\boldsymbol{P}}{3}$$

(2) 强度计算

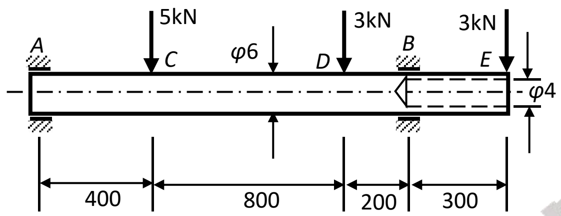
$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W}=\frac{\frac{2P}{3}}{W}=\frac{2}{3W}\cdot P\le[\sigma]$$

$$\therefore P\le\frac{3W[\sigma]}{2}=\frac{3\times237\times10^{-6}\times160\times10^{6}}{2}=56.88kN$$

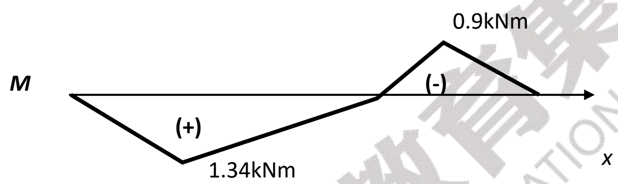
取许可载荷

$$[P]=57kN$$

7、图示圆轴的外伸部分系空心轴。试作轴弯矩图，并求轴内最大正应力。



解：(1) 画梁的弯矩图



由弯矩图知：可能危险截面是 C 和 B 截面

(2) 计算危险截面上的最大正应力值

C 截面：

$$\sigma_{C\max}=\frac{M_C}{W_C}=\frac{M_C}{\frac{\pi d_C^3}{32}}=\frac{32\times1.34\times10^3}{\pi\times0.06^3}=63.2MPa$$

B 截面：

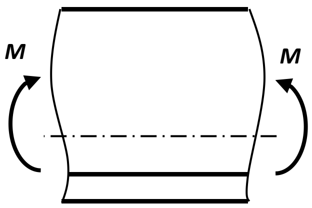
$$\sigma_{B\max}=\frac{M_B}{W_B}=\frac{M_B}{\frac{\pi D_B^3}{32}(1-\frac{d_B^4}{D_B^4})}=\frac{0.9\times10^3}{\frac{\pi\times0.06^3}{32}(1-\frac{0.045^4}{0.06^4})}=62.1MPa$$

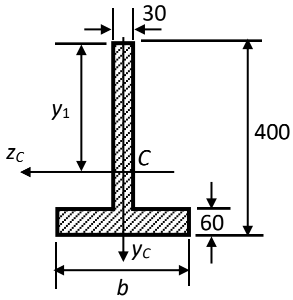
(3) 轴内的最大正应力值

$$\sigma_{\max}=\sigma_{C\max}=63.2MPa$$

8、图示横截面为⊥形的铸铁承受纯弯曲，材料的拉伸和压缩许用应力之比为$[\sigma_t]/[\sigma_c]=1/4$。

求水平翼缘的合理宽度 *b*。





解：(1) 梁截面上的最大拉应力和最大压应力

$$\sigma_{t,\max}=\frac{M\left(400-y_1\right)}{I_z}\qquad \sigma_{c,\max}=\frac{My_1}{I_z}$$

$$\frac{\sigma_{t,\max}}{\sigma_{c,\max}}=\frac{400-y_1}{y_1}=\frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}=\frac{1}{4}$$

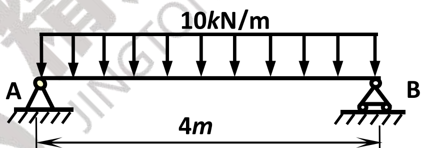
$$y_1=320\ mm$$

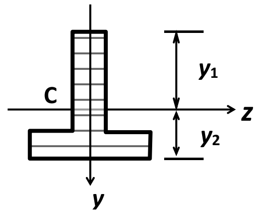
(2) 由截面形心位置

$$y_C=\frac{\sum A_i y_{Ci}}{\sum A_i}=\frac{30\times\left(400-60\right)\times170+b\times60\times370}{30\times\left(400-60\right)+b\times60}=320$$

$$b=510\ mm$$

9、已知悬臂梁 AB，截面形状尺寸和所受外力如图所示。图中 *z* 为形心轴，y_1=157.5mm，y_2=72.5mm，惯性矩 I_z=6013×10^{4}mm^4，已知材料[σt]=30MPa， [σc]=90MPa，试校核梁的正应力强度。（10 分）





解：1） 简支梁跨中弯矩最大

$$M^{+}_{\max}=\frac{1}{8}ql^2=20KN\cdot m$$（上压下拉）

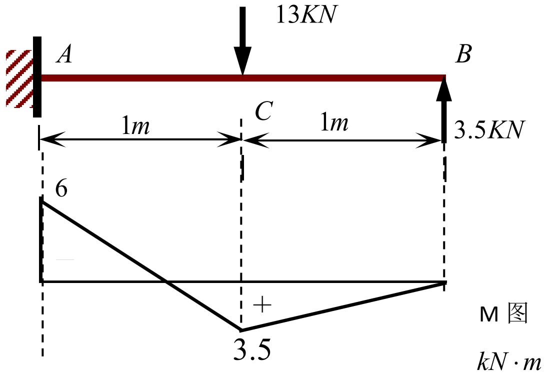
2）正应力校核

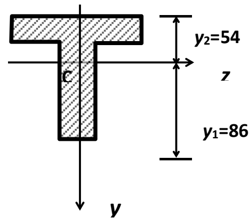
$$\sigma_{t,\max}=\frac{M_{\max}\cdot y_2}{I_Z}=\frac{20\times10^6\times72.5}{6013\times10^4}=24.1MPa<[\sigma_t]$$

$$\sigma_{c,\max}=\frac{M_{\max}\cdot y_1}{I_Z}=\frac{20\times10^6\times157.5}{6013\times10^4}=52.4MPa<[\sigma_c]$$

所以正应力强度合格。

10、铸铁梁的截面形状尺寸、所受外力及弯矩图如下图所示。已知 z 为形心轴，y_1=86mm，y_2=54mm，惯性矩 $I_z=7.64\times10^6\text{mm}^4$，材料许可拉应力$[\sigma_t]$=40MPa，许可压应力$[\sigma_c]$=100MPa，试校核梁的强度。





解：1） 由弯矩图可知，危险截面为 C、A

$$M_C = M_{\max}^{+} = 3.5KN\cdot m \qquad M_A = M_{\max}^{-} = 5KN\cdot m$$

2）C 截面校核（上压下拉）

$$\sigma_{c,\max} = \frac{M_C\cdot y_2}{I_Z} = \frac{3.5\times10^6\times54}{7.64\times10^6} = 24.74MPa < [\sigma_c]$$

$$\sigma_{t,\max} = \frac{M_C\cdot y_1}{I_Z} = \frac{3.5\times10^6\times86}{7.64\times10^6} = 39.40MPa < [\sigma_t]$$

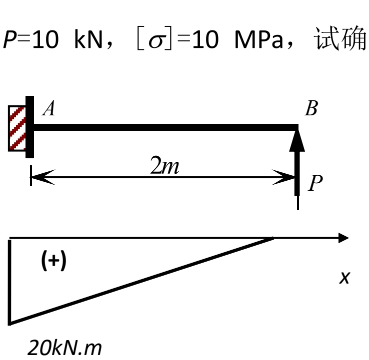
3）A 截面校核

$$\sigma_{c,\max} = \frac{M_A\cdot y_1}{I_Z} = \frac{6\times10^6\times86}{7.64\times10^6} = 67.54MPa < [\sigma_c]$$

$$\sigma_{t,\max} = \frac{M_A\cdot y_2}{I_Z} = \frac{6\times10^6\times54}{7.64\times10^6} = 42.41MPa > 1.05[\sigma_t]$$

综上，梁的强度不满足要求　　（1 分）

11、矩形截面悬臂梁如图所示，已知 l=2 m，b/h=2/3，P=10 kN，$[\sigma]$=10 MPa，试确定此梁横截面的尺寸。



解：(1) 画梁的弯矩图

由弯矩图知：

$$M_{\max} = 40\text{kN.m}$$

(2) 计算抗弯截面系数

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{\frac{2}{3}h^3}{6} = \frac{h^3}{9}$$

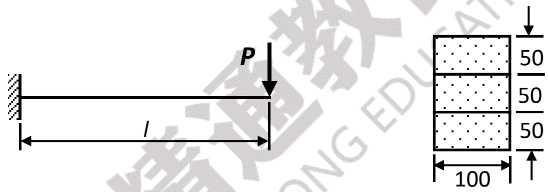
(3) 强度计算

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{20\times10^6}{\frac{h^3}{9}} \le [\sigma]$$

$$\therefore h \ge \sqrt[3]{\frac{9\times20\times10^6\times9}{[\sigma]}} = 416mm$$

$$b \ge 277mm$$

12、由三根木条胶合而成的悬臂梁截面尺寸如图所示，跨度 l=1 m。若胶合面上的许用切应力为 0.34 MPa，木材的许用弯曲正应力为[σ]=10 MPa，许用切应力为[τ]=1 MPa，试求许可载荷 P。



解：(1) 截面上的最大剪力和弯矩

$$V_{\max} = P \qquad M_{\max} = Pl$$

(2) 梁弯曲正应力强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{Pl}{\frac{1}{6}bh^2} \le [\sigma]$$

$$P \le \frac{[\sigma]bh^2}{6l} = \frac{10\times10^6\times0.1\times0.15^2}{6\times1} = 3.75\ kN$$

(3) 梁弯曲切应力强度条件

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2}\frac{V_{\max}}{A} = \frac{3}{2}\frac{P}{bh} \le [\tau]$$

$$P \le \frac{2[\tau]bh}{3} = \frac{2\times1\times10^6\times0.1\times0.15}{3} = 10\,kN$$

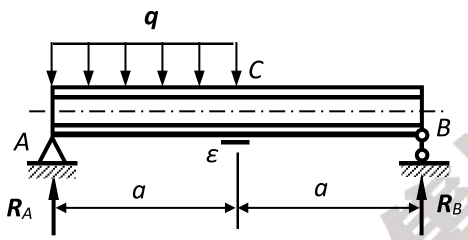
(4)胶合面上切应力强度条件

$$\tau=\frac{V_{\max}}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)=\frac{P}{2\times\frac{bh^3}{12}}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)\le[\tau_1]$$

$$P\le\frac{[\tau_1]bh^3}{6\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)}=\frac{0.34\times10^6\times0.1\times0.15^3}{6\left(\frac{0.15^2}{4}-0.025^2\right)}=3.825\,kN$$

许可载荷：$[P]$=3.75 kN。

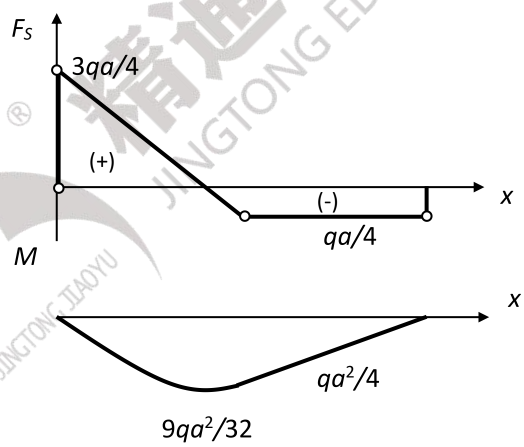
14、图示简支梁，由 No28 工字钢制成，在集度为 q 的均布载荷作用下，测得横截面 C 底边的纵向正应变$\varepsilon=3.0\times10^{-4}$，试计算梁内的最大弯曲正应力，已知钢的弹性模量 E=200 Gpa，a=1 m。



解：(1) 求支反力

$$R_A=\frac{3}{4}qa\quad R_B=\frac{1}{4}qa$$

(2) 画内力图



(3) 由胡克定律求得截面 C 下边缘点的拉应力为：

$$\sigma^+_{C\max}=\varepsilon\cdot E=3.0\times10^{-4}\times200\times10^9=60\,MPa$$

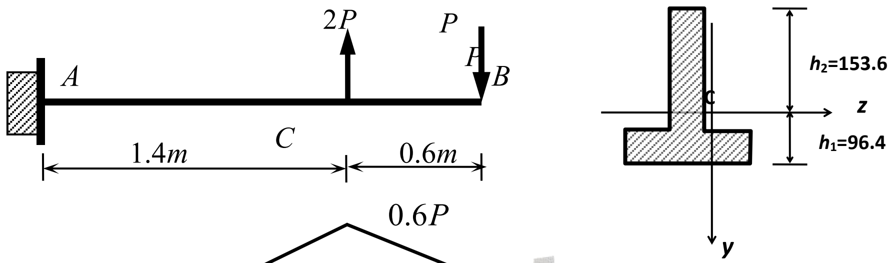
也可以表达为：

$$\sigma^+_{C\max}=\frac{M_C}{W_z}=\frac{\frac{qa^2}{4}}{W_z}$$

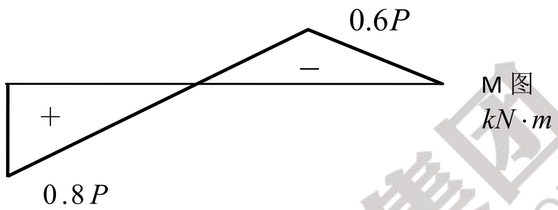
(4) 梁内的最大弯曲正应力：

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}=\frac{\frac{9qa^2}{32}}{W_z}=\frac{9}{8}\sigma_{C\max}^{+}=67.5\ MPa$$

15、⊥形截面铸铁梁如图所示。若铸铁的许用拉应力为$[\sigma_t]$=40 MPa，许用压应力为$[\sigma_c]$=160 MPa，截面对形心 z_c 的惯性矩 I_{zc}=10180 cm^4，h_1=96.4 mm，h_2=153.6mm 试求梁的许用载荷 P。



解：(1) 画梁的弯矩图



由弯矩图知：可能危险截面是 A 和 C 截面

(2) 强度计算

A 截面的最大压应力

$$\sigma_{C\max}=\frac{M_A h_2}{I_{zC}}=\frac{0.8Ph_2}{I_{zC}}\le[\sigma_C]$$

$$\therefore P\le\frac{I_{zC}[\sigma_C]}{0.8h_2}=\frac{10180\times10^{-8}\times160\times10^6}{0.8(250-96.4)\times10^{-3}}=132.6kN$$

A 截面的最大拉应力

$$\sigma_{t\max}=\frac{M_A h_1}{I_{zC}}=\frac{0.8Ph_1}{I_{zC}}\le[\sigma_t]$$

$$\therefore P\le\frac{I_{zC}[\sigma_t]}{0.8h_1}=\frac{10180\times10^{-8}\times40\times10^6}{0.8\times96.4\times10^{-3}}=52.8kN$$

C 截面的最大拉应力

$$\sigma_{t\max}=\frac{M_C h_2}{I_{zC}}=\frac{0.6Ph_2}{I_{zC}}\le[\sigma_t]$$

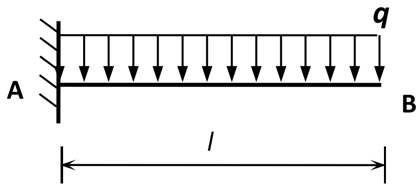
$$\therefore P\le\frac{I_{zC}[\sigma_t]}{0.6h_2}=\frac{10180\times10^{-8}\times40\times10^6}{0.6(250-96.4)\times10^{-3}}=44.2kN$$

取许用载荷值

$$[P]=44.2kN$$

第七章 弯曲变形

1、用积分法求图示悬臂梁的挠曲线方程和转角方程。



解：$M(x)=-\dfrac{q}{2}(l-x)^2$

$$EIv''(x)=-M(x)=\frac{q}{2}(l-x)^2$$

$$EIv'(x)=-\frac{q}{6}(l-x)^3+\mathrm{C}$$

$$EIv(x)=\frac{q}{24}(l-x)^4+\mathrm{C}x+D$$

边界条件：x=0 时，v（0）=0；ϑ（0）=0

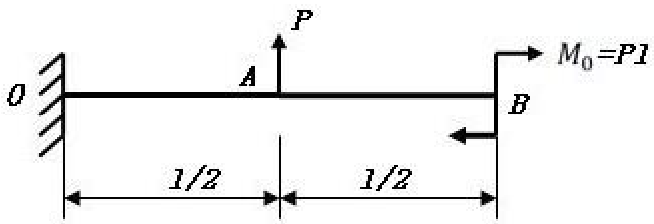
解得　$\mathrm{C}=\dfrac{ql^3}{6}$；$\mathrm{D}=-\dfrac{ql^4}{24}$

梁的转角方程和挠曲线方程分别为

$$\theta(x)=v'(x)=-\frac{q}{6EI}(l-x)^3+\frac{ql^3}{6EI}$$

$$EIv(x)=\frac{q}{24}(l-x)^4+\frac{ql^3}{6EI}x-\frac{ql^4}{24EI}$$

2、 用积分法求图所示梁 A 截面的挠度和 B 截面的转角。



解 ① 对于 OA 段： 弯矩方程为 $M(x)=-\dfrac{1}{2}Pl-Px$

即　$EIy''=-\dfrac{1}{2}Pl-Px$

$$EIy'=-\frac{1}{2}Plx-\frac{1}{2}Px^2+C_1$$

$$EIy=-\frac{1}{4}Plx^2-\frac{1}{6}Px^3+C_1x+C_2$$

边界条件 $x=0$　$y'=0$

$x=0$　$y=0$

由此边界条件可解得 $C_1=C_2=0$

将 $C_1=C_2=0$ 及 $x=\frac{1}{2}l$ 分别代入挠度及转角方程得

A 截面转角为 $\theta_A=-\frac{3Pl^2}{8EI}$ 挠度为 $y_A=-\frac{Pl^3}{12EI}$

② 对于 AB 段 弯矩 $M=EIy''=Pl$

则 $EIy'=EI\theta=Plx+C_3$（设 $x=0$ 处为 A 截面）

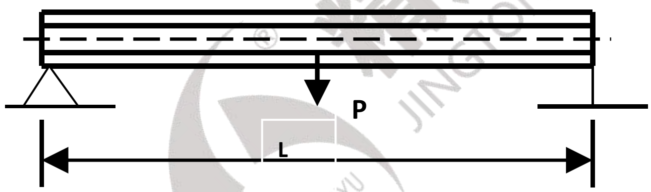
边界条件 $x=0$ $\theta=\theta_A=-\frac{3Pl^2}{8EI}$ 得 $C_3=-\frac{3}{8}Pl^2$

将 $C_3=-\frac{3}{8}Pl^2$ 及 $x=\frac{1}{2}l$ 代入转角方程即得

B 截面转角为 $\theta_B=\frac{Pl^2}{8EI}$

综上所述：A 截面挠度为 $y_A=-\frac{Pl^3}{12EI}$ B 截面转角为 $\theta_B=\frac{Pl^2}{8EI}$

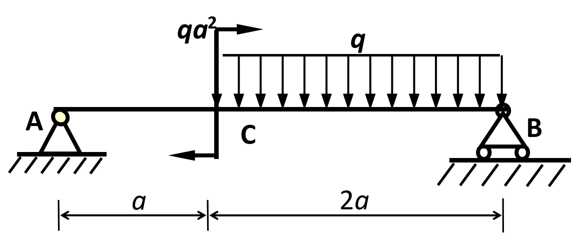
3、如图所示桥式起重机的最大载荷为 P=20kN，起重机大梁为 32a 工字钢，E=210Gpa，L=8.76cm。规定[f]=L/500。校核大梁的刚度。(I=11100(cm^4) $f_{\max}=\frac{pl^3}{48EI}$)



$$f_{\max}=\frac{Pl^3}{48EI}=\frac{20\times10^3\times0.0876^2 l}{48\times210\times10^9\times11100\times10^{-8}}=\frac{l}{730}\le[f]=\frac{l}{500}$$

可见符合刚度要求

4、用积分法求图示梁挠曲线方程时，需分几段列方程？试写出确定积分常数的边界条件及变形连续条件。、



解：需分两段列方程。

边界条件：

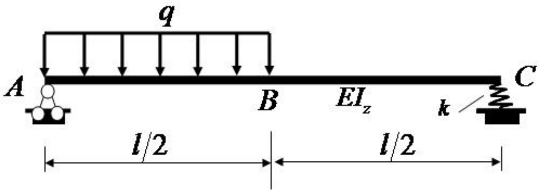
$$v_A=0$$
$$v_B=0$$

连续条件：

$v_C^{\ +} = v_C^-$

$\theta_C^+ = \theta_C^-$

5、用积分法求下图梁挠曲线方程时，梁的挠曲线近似微分方程应分几段？共出现几个积分常数？并写出其确定积分常数的所有条件。



解：挠曲线方程应分为 AB、BC 两段，共有 4 个积分常数。

位移边界条件：

$x = 0 \quad \upsilon_A = 0$

$x = l \quad \upsilon_C = \dfrac{R_c}{k} = \dfrac{ql}{8k}$

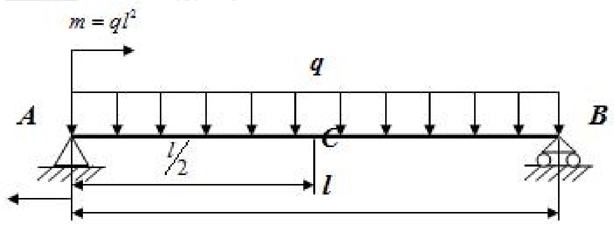
变形连续条件：

$x = 0.5l \quad \upsilon_{B1} = \upsilon_{B2}$

$x = 0.5l \quad \theta_{B1} = \theta_{B2}$

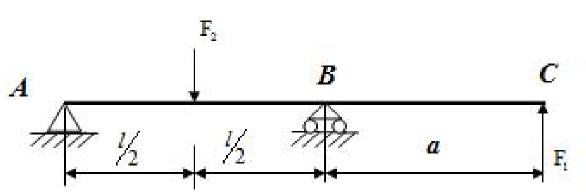
6、简支梁上作用均布载荷 q 以及集中力偶，试用叠加法求梁跨中截面的挠度及两端截面 A、B 的转角。（答案：$\mathrm{v_C} = (\mathrm{v_C})_q + (\mathrm{v_C})_m = \dfrac{5\mathrm{ql}^2}{384\mathrm{EI}} + \dfrac{5\mathrm{ql}^2}{384\mathrm{EI}} = \dfrac{29ql^4}{384\mathrm{EI}}$

$\theta_\mathrm{A} = (\theta_\mathrm{A})_\mathrm{q} + (\theta_\mathrm{A})_m = \dfrac{\mathrm{ql}^3}{24\mathrm{EI}} + \dfrac{\mathrm{ql}^3}{3\mathrm{EI}} = \dfrac{9\mathrm{ql}^3}{24\mathrm{EI}}$ $\theta_\mathrm{B} = (\theta_\mathrm{B})_q + (\theta_\mathrm{B})_m = \dfrac{\mathrm{ql}^3}{24\mathrm{EI}} - \dfrac{ml}{6\mathrm{EI}} = -\dfrac{5\mathrm{ql}^3}{24\mathrm{EI}}$）

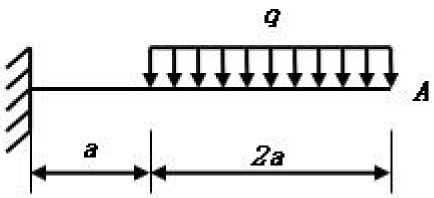


7、如图所示截面外伸梁，EI=常数。使用叠加法求截面 B 的转角和端点 C 的挠度。

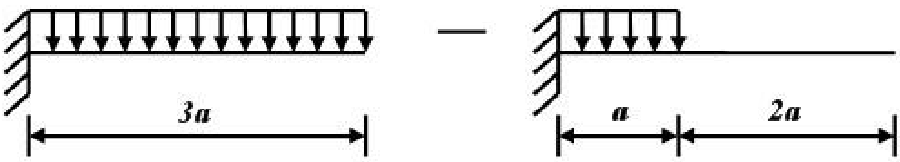
（参考答案：$\theta_\mathrm{B} = -\dfrac{\mathrm{F_1al}}{3\mathrm{EI}} - \dfrac{\mathrm{F_2l^2}}{16\mathrm{EI}}$、$v_C = v_{C_1} + v_{C_2} = -\dfrac{\mathrm{F_1}a^2}{3\mathrm{EI}}(a+l) - \dfrac{\mathrm{F_2al^2}}{16\mathrm{EI}}$）



8、用叠加法求如图所示梁截面 A 的挠度和转角。EI 为已知常数。



解：可分解为如下两图相减后的效果



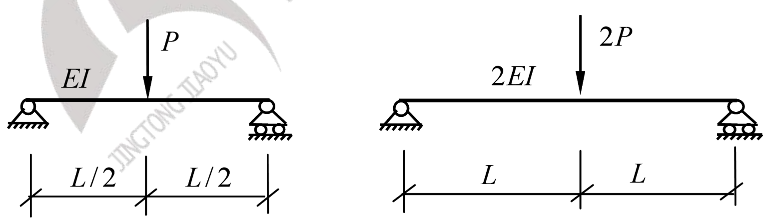
(1)　　　　　　(2)

查表得　$\theta_1 = -\dfrac{q(3a)^3}{6EI} = -\dfrac{9qa^3}{2EI}$　显然 $\theta_2 = -\dfrac{qa^3}{6EI}$

$$y_1 = -\frac{q(3a)^4}{8EI} = -\frac{81qa^4}{8EI} \qquad y_2 = -\frac{qa^4}{8EI} + \theta_2 a = -\frac{11qa^4}{24EI}$$

则 $\theta = \theta_1 - \theta_2 = -\dfrac{13qa^3}{3EI}$　　$y = y_1 - y_2 = -\dfrac{24qa^4}{3EI}$

9、如图所示为两根材料相同的简支梁，求两梁中点的挠度之比 w_a / w_b。



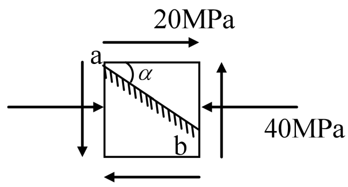
(a)　　　　　(b)

解：

$$\frac{wa}{wb} = \frac{kPL^3}{EI} / \frac{k2P(2L)^3}{2EI} = \frac{1}{8}$$

第九章　　应力状态分析和强度理论

1、用解析法求图示单元体 ab 面上的应力（$\alpha = 30^0$），并求 $\tau_{\max}$ 及主应力。



解答：

$\because \sigma_x=-40Mpa,\sigma_y=0,\tau_{xy}=-20Mpa$

$$\sigma_{60^\circ}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha-\tau_{xy}\sin 2\alpha=-\frac{40}{2}-\frac{40}{2}\cos 120^\circ+20\sin 120^\circ=7.32\ Mpa$$

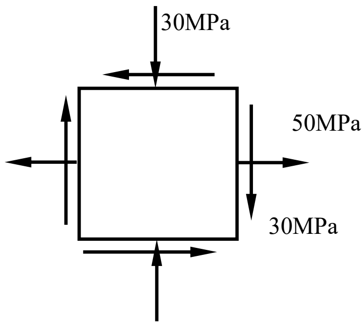
$$\tau_{60^\circ}=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha+\tau_{xy}\cos 2\alpha=-\frac{40}{2}\sin 120^\circ-20\cos 120^\circ=-7.32\ Mpa$$

$$\therefore \left.\begin{matrix}\sigma 1=\sigma_{\max}\\ \sigma_3=\sigma_{\min}\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}{}^2}=-\frac{40}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{40}{2}\right)^2+20^2}=\begin{matrix}8.3Mpa\\-48.3Mpa\end{matrix}$$

$\therefore \sigma_1=8.3Mpa,\sigma_2=0,\sigma_3=-48.3Mpa$

$$\tau_{\max}=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)=28.3Mpa$$

2、求图示单元体的主应力和主方向、最大剪应力。



解：由图可知：

σ_x =50MPa　　σ_y=－30MPa

τ_x=30MPa

则

$$\sigma_{ps}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x{}^2}$$

$$=\frac{50-30}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{50+30}{2}\right)^2+30^2}=10\pm 50$$

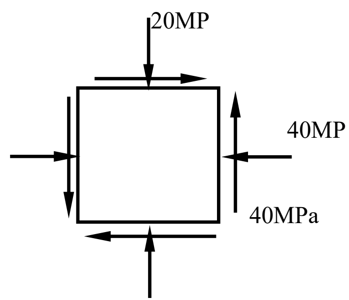
∴ σ_1=60MPa　　σ_2=0　　σ_3=－40MPa

$$\tan\alpha_0=-\frac{2\tau_x}{\sigma_x-\sigma_y}=\frac{-60}{50+30}=-0.75$$

$$\therefore \alpha_0=-18.4^\circ$$

$$\tau_{\max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=50MPa$$

3、已知应力状态如图所示，图中应力单位皆为 MPa。试求：



1) 主应力大小；　　2) 主平面位置；3) 绘出主单元体及主应力方向；4) 单元体的最大剪应力。

解：由图可知：

σ_x =－40MPa　　σ_y=－20MPa　　τ_x=－40MPa

则：（1）

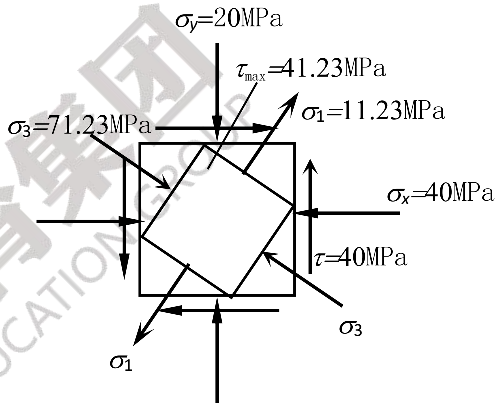
$$\sigma_{ps}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x{}^2}$$

$$=\frac{-40-20}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-40+20}{2}\right)^2+40^2}=-30\pm41.2$$

∴ σ_1=11.2MPa　　σ_2=0　　σ_3=-71.2MPa

（2）$\tan\alpha_0=-\dfrac{2\tau_x}{\sigma_x-\sigma_y}=\dfrac{80}{-20}=-4$

$\therefore\alpha_0=-38^{\circ}$



（3）主单元体及主应力方向如图所示。

（4）$\tau_{\max}=\dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=41.2MPa$

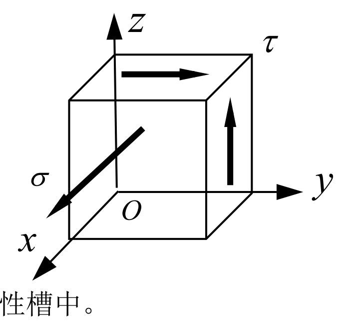
4、已知某点处的应力状态如图所示，$\tau=60\text{MPa}$，$\sigma=100\text{MPa}$，弹性模量 $E=200\text{GPa}$，泊松比 $\nu=0.25$，求该点处的三个主应力及最大正应变。

解：

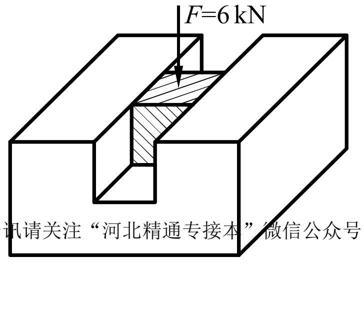
$s_1=100MPa$，　$s_2=60MPa$，　$s_3=-60MPa$

$$e_{\max}=\frac{1}{E}[s_1-n(s_2+s_3)]$$

$$=\frac{1}{200´\ 10^3}[100-0.25(60-60)]=0.5´\ 10^{-3}$$



5、一体积为 $10\times10\times10\ \text{mm}^3$ 的立方铝块，将其放入宽为 $10\ \text{mm}$ 的刚性槽中。已知铝的泊松比 $\nu=0.33$，求铝块的三个主应力。



（参考答案：$\sigma_3=-\dfrac{6\times10^3}{0.01\times0.01}=-60\ \text{MPa}$，　$\sigma_1=0$

由 $\varepsilon_2=\dfrac{1}{E}(\sigma_2+0.33\times60)=0$ 得 $\sigma_2=-19.8\,\text{MPa}$

6、第三强度理论和第四强度理论的相当应力分别为σ_{r3}及σ_{r4}，对于纯剪切应力状态，求解σ_{r3}/σ_{r4}

解答：纯剪应力状态

$$\sigma_1=\tau,\sigma_2=0,\sigma_3=-\tau,\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=\tau+\tau=2\tau$$

$$\sigma_{r3}=\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}=\sqrt{\frac{1}{2}(\tau^2+\tau^2+4\tau^2)}=\sqrt{3}\tau$$

$$\therefore\frac{\sigma_{r3}}{\sigma_{r4}}=\frac{2\tau}{\sqrt{3}\tau}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

7、试对给定应力状态：$\sigma_x=212\text{MPa}$、$\sigma_y=-212\text{MPa}$、$\tau_{xy}=212\text{MPa}$，确定材料是否失效：

（1）对脆性材料用最大拉应力理论，若已知材料$\sigma_b=300\text{MPa}$；

（2）对塑性材料用最大切应力理论及形状改变比能理论，若已知材料$\sigma_s=500\text{MPa}$。

解答：

xy 平面内：$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\\sigma_{min}\end{matrix}\right\}=\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}^2}=\dfrac{212-212}{2}\pm\sqrt{\dfrac{212+212}{2}+212^2}=\left\{\begin{matrix}299.8Mpa\\-299.8Mpa\end{matrix}\right.$

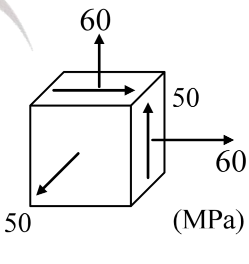
$\therefore\sigma_1=299.8Mpa,\sigma_2=o,\sigma_3=-299.8Mpa$

（1）脆性材料：$\sigma_1=299.8Mpa<\sigma_b$ 故材料未失效

（2）塑像材料：$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=299.8-(-299.8)=599.6Mpa>\sigma_s$ 故材料失效

8、已知某构件危险点的应力状态如图，$[\sigma]=160\text{MPa}$。试校核其强度。

（用第三强度理论）



解答：

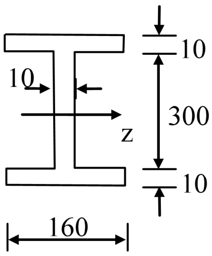
在 x，y 平面内$\sigma_x=\sigma_y=60Mpa,\tau_{xy}=-50Mpa$

$\therefore\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\\sigma_{min}\end{matrix}\right\}=\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}^2}=\dfrac{60+60}{2}\pm\sqrt{(\dfrac{60-60}{2})^2+(-50)^2}=\left\{\begin{matrix}110Mpa\\10Mpa\end{matrix}\right.$

$\therefore\sigma_1=110Mpa,\sigma_2=50Mpa,\sigma_3=10Mpa$

$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=100Mpa<[\sigma]$

8、工字型截面钢梁，$[\sigma]=170\text{MPa}$，$I_z=9940\text{cm}^4$，危险截面上$\text{V}=180\text{kN}$，$M=100\text{kN}\cdot\text{m}$。校核梁的正应力及相当应力强度。（用第三强度理论）



解答：

先对上下边缘进行强度校核：$\sigma_{\max}=\frac{My_{\max}}{I_z}=\frac{100\times10^3\times0.16}{9940\times10^{-8}}=161Mpa<[\sigma]=170Mpa$

其次对胶板剪缘分界处进行强度校核

$$\sigma_x=\sigma=\frac{My_x}{z_z}=\frac{100\times10^3\times0.15}{9440\times10^{-8}}=151Mpa,\sigma_y=0$$

$$\tau_{xy}=\tau=\frac{F_sS^*_{zk}}{I_zb}=\frac{180\times10^3\times0.16\times0.01\times0.155}{9440\times10^{-8}\times0.01}=45Mpa$$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\\sigma_{\min}\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}{}^2}=\frac{151}{2}\pm\sqrt{(\frac{151}{2})^2+45^2}=\left\{\begin{matrix}163.4Mpa\\-12.4Mpa\end{matrix}\right.$$

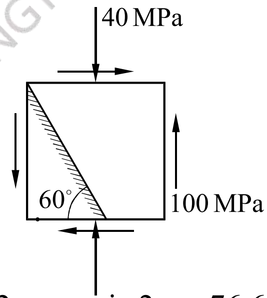
$$\therefore\sigma_1=163.4Mpa,\sigma_2=0Mpa,\sigma_3=-12.4Mpa,\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=176Mpa>[\sigma]$$

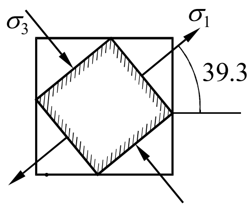
但，$\frac{176-170}{170}=3.5\%<5\%$ 所以安全

9、图示单元体，试求

(1) 指定斜截面上的应力；

(2) 主应力大小及主平面位置，并将主平面标在单元体上。





解：(1) $\sigma_\alpha=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\alpha-\tau_x\sin2\alpha=76.6\text{ MPa}$

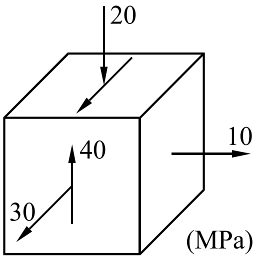
$$\tau_\alpha=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin2\alpha+\tau_x\cos2\alpha=-32.7\text{ MPa}$$

(2) $\begin{matrix}\sigma_{\max}\\\sigma_{\min}\end{matrix}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}{}^2}=\begin{matrix}81.98\\-121.98\end{matrix}\text{MPa}$

$\sigma_1=81.98\text{MPa}$，$\sigma_2=0$，$\sigma_3=-121.98\text{MPa}$

$\alpha_0=39.35^\circ$

10、某点的应力状态如图示，求该点的主应力及最大切应力。



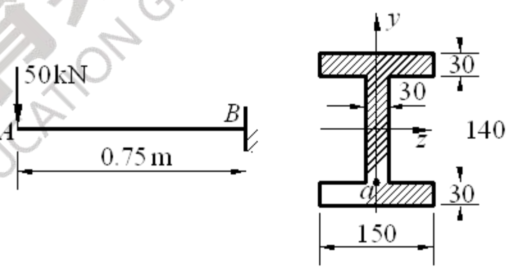
解：$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}{}^2}$

$$= \frac{30-20}{2} \pm \sqrt{25^2+40^2} = 5 \pm 47.16 = \begin{matrix}52.16\\ -42.16\end{matrix}\text{MPa}$$

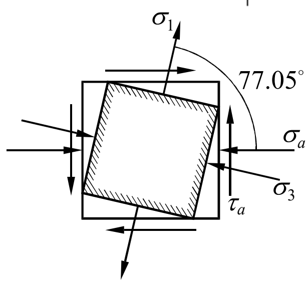
所以 $\sigma_1 = 52.2\,\text{MPa}$，$\sigma_2 = 10\,\text{MPa}$，$\sigma_3 = -42.16\,\text{MPa}$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} = 47.2\,\text{MPa}$$

11、图示工字形截面梁 AB，截面的惯性矩 $I_z = 72.56\times10^{-6}\ \text{m}^4$，求固定端截面翼缘和腹板交界处点 a 的主应力和主方向。



解：$\sigma = \dfrac{50\times10^3\times0.75\times0.07}{72.56\times10^{-6}} = 36.17\ \text{MPa}$（压应力）



$$\tau = \frac{50\times10^3\times150\times30\times85\times10^{-9}}{0.03\times72.56\times10^{-6}} = 8.8\ \text{MPa}$$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}{}^2} = \begin{matrix}2.03\\ -38.2\end{matrix}\ \text{MPa}$$

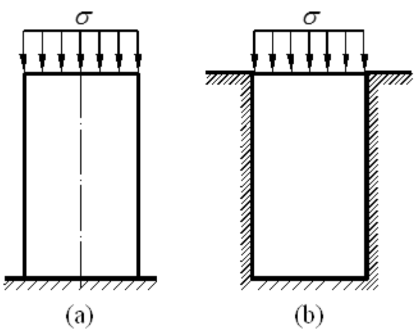
$\sigma_1 = 2.03\ \text{MPa}$，$\sigma_2 = 0$，$\sigma_3 = -38.2\ \text{MPa}$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\arctan(\frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}) = \frac{1}{2}\arctan\frac{-2\times8.8}{36.17} = 77.05^\circ$$

12、图示正方形截面棱柱体，弹性常数 E、ν 均为已知。试比较在下列两种情况下的相当应力 σ_{r3}。

(a) 棱柱体自由受压；

(b) 棱柱体在刚性方模内受压。



(a) (b)

解：(a) $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$，$\sigma_3 = -\sigma$

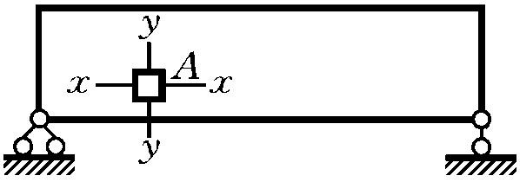
$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma$$

(b) $\sigma_3 = -\sigma$，　　$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$

所以 $\sigma_1 = \sigma_2 = -\dfrac{\nu\sigma}{(1-\nu)}$

所以 $\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = -\dfrac{\nu\sigma}{(1-\nu)} + \sigma = \dfrac{(1-2\nu)\sigma}{(1-\nu)}$

13、列车通过钢桥时，在钢桥横梁的 A 点用应变仪测得ε_x=0.4×10-3，ε_y= -0.12×10-3 ，已知：E=200GPa，μ=0.3。试求 A 点的 x-x 及 y-y 方向的正应力。



解：A 点为平面应力状态，由广义胡克定律

$$e_x = \frac{1}{E}(s_x - m s_y) \qquad e_y = \frac{1}{E}(s_y - m s_x)$$

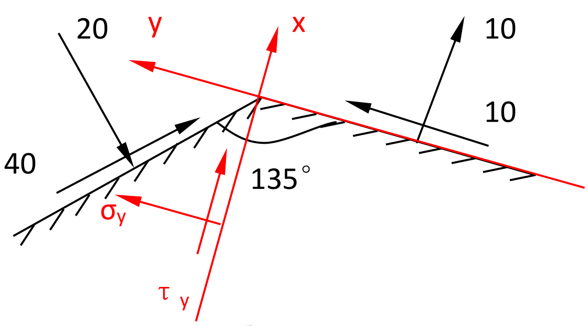
$$s_x = \frac{E}{1 - m^2}(e_x + m e_y)$$

$$= \frac{200´\ 10^9}{1 - 0.3^2} \quad (0.4 \quad 0.3创0.12) \quad 10^{-3} = 80\,MPa$$

$$s_y = \frac{E}{1 - m^2}(e_y + m e_x)$$

$$= \frac{200´\ 10^9}{1 - 0.3^2} \quad (\quad 0.12 + 0.3创0.4) \quad 10^{-3} = 0$$

14、受力体某点两平面上的应力如图所示，求其主应力大小。（单位：MPa）（10分）



解：设

σ_x =10MPa

τ_x=－10MPa

由图可知

$\sigma_{45°}$ =－20MPa

$\tau_{45°}$ =40MPa

而

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\cdot\cos(90^\circ) - \tau_x\sin(90^\circ)$$
$$= \frac{10+\sigma_y}{2} + 10 = -20$$

解得 $\sigma_y = -70MPa$

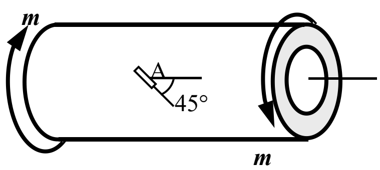
则

$$\sigma_{ps} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

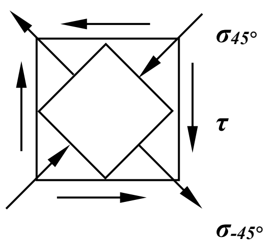
$$= \frac{10-70}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10+70}{2}\right)^2 + 10^2} = -30 \pm 41.2$$

∴ σ_1=11.2MPa　　σ_2=0　　σ_3=-71.2MPa

16、今测得受扭空心圆轴表面 A 点与轴线成 45°方向的线应变 ε_0，空心圆轴外径为 D，内外径之比为 α 。试求力偶矩 m 之值。已知材料常数 E 和 ν。



解：A 点应力状态如图所示



剪应力：

$$\tau=\frac{m}{W_t}=\frac{m}{\frac{\pi D^3}{16}\times\left(1-\alpha^4\right)}=\frac{16m}{\pi D^3\left(1-\alpha^4\right)}$$

$$\sigma_{-45^\circ}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\cdot\cos\left(-90^\circ\right)=\tau$$

$$\tau_{-45^\circ}=\tau_{45^\circ}=0 \qquad \sigma_{45^\circ}=-\tau$$

$$\varepsilon_0=\frac{1}{E}\left(\sigma_{-45^\circ}-\nu\cdot\sigma_{45^\circ}\right)=\frac{1+\nu}{E}\cdot\tau$$

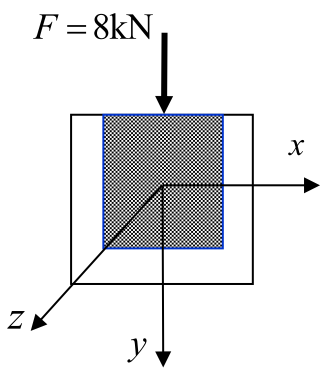
$$\tau=\frac{E\cdot\varepsilon_0}{1+\nu}$$

即：$\dfrac{16m}{\pi D^3\left(1-\alpha^4\right)}=\dfrac{E\cdot\varepsilon_0}{1+\nu}$

$$m=\frac{E\cdot\pi D^3\left(1-\alpha^4\right)\cdot\varepsilon_0}{16\left(1+\nu\right)}$$

17、边长为 20mm 的钢立方体置于钢模中恰好不留空隙，在顶面上受力 F=20kN 作用。已知，E=200GPa，ν=0.3，试求钢块的三个主应力、最大剪应力。

解：



由题意：

$$\sigma_y=-\frac{F}{A}=-\frac{20\times10^3}{20\times20}=-50MPa$$

再由广义胡克定律：

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu\left(\sigma_y+\sigma_z\right)\right]=0$$

即 $\sigma_x-0.25\times\left(-50+\sigma_z\right)=0$ ①

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}\left[\sigma_z-\nu\left(\sigma_y+\sigma_x\right)\right]=0$$

$\sigma_z-0.25\times\left(-50+\sigma_x\right)=0$ ②

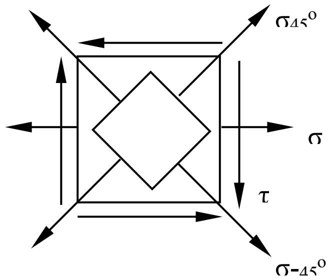
由①②两式联立即可解出

$$\sigma_x=\sigma_z=-21.43\text{MPa}$$

三个主应力分别为：$\sigma_1=\sigma_2=-21.43\text{MPa}$，$\sigma_3=-50\text{MPa}$

$$\tau_{\max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=\frac{-21.43-(-50)}{2}=14.28MPa$$

18．如图所示某点的单元体，已知该点沿着 45^0、-45^0 方向的线应变分别为 a、b，已知弹性模量 E 和波松比μ，求σ、τ的值。



解： $\varepsilon_{45^\circ}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{45^\circ}-\mu\sigma_{-45^\circ}\right)$

$$\varepsilon_{-45^\circ}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{-45^\circ}-\mu\sigma_{45^\circ}\right)$$

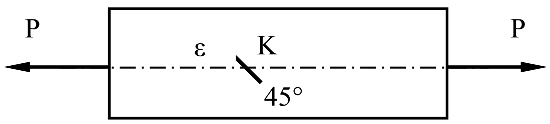
$$\sigma_{45^\circ}=\frac{\sigma}{2}+\frac{\sigma}{2}\cos 90^\circ-\tau\sin 90^\circ=\frac{\sigma}{2}-\tau$$

$$\sigma_{-45^\circ}=\frac{\sigma}{2}+\frac{\sigma}{2}\cos(-90^\circ)-\tau\sin(-90^\circ)=\frac{\sigma}{2}+\tau$$

解得：$\sigma=\frac{E(\varepsilon_{45^\circ}+\varepsilon_{-45^\circ})}{1-\mu}=\frac{（a+b）E}{1-\mu}$

$$\tau=-\frac{E(\varepsilon_{45^\circ}-\varepsilon_{-45^\circ})}{2(1+\mu)}=-\frac{（a-b）E}{2(1+\mu)}$$

22．如图所示，由实验测得拉伸试件上点 K 沿与轴线成 45°方向的线应变ε，试求此时试件所受拉力 P。已知试件的横截面面积 A，材料的弹性模量 E 和泊松比μ。



解：由题意可知

K 点所在截面轴力

N=P

正应力：$\sigma=\frac{P}{A}$ （单向拉伸应力状态）

$$\sigma_{45^\circ}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\cdot\cos\left(90^\circ\right)-\tau_x\sin(90^\circ)=\frac{\sigma}{2}$$

$$\sigma_{-45^\circ}=\frac{\sigma}{2}$$

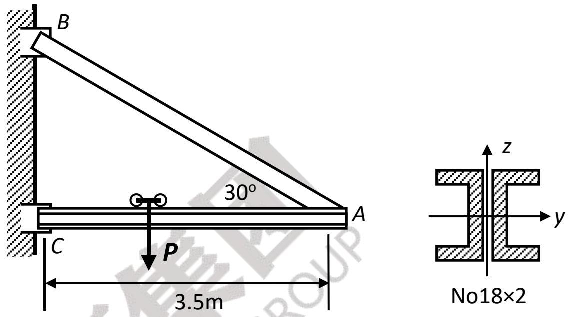
$$\varepsilon_{-45^\circ}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{-45^\circ}-\mu\cdot\sigma_{45^\circ}\right)=\frac{1-\mu}{2E}\cdot\sigma=\frac{1-\mu}{2E}\frac{P}{\mathrm{A}}$$

$$\therefore\quad P=\frac{2E\mathrm{A}\varepsilon}{1-\mu}$$

第十一章　组合变形

1、图示起重架的最大起吊重量（包括行走小车等）为 P=40 kN，横梁 AC 由两根 No18 槽钢组成，材料为 Q235 钢，许用应力[σ]=120MPa。试校核梁的强度。No.18 工字钢：

$\boldsymbol{W_y}=152\boldsymbol{cm}^3\qquad \boldsymbol{A}=29.299\boldsymbol{cm}^2$



No18×2

（**参考答案：**AC 梁跨中截面为危险截面，$\boldsymbol{N}=34.64\ \boldsymbol{kN}\qquad \boldsymbol{M}_{\max}=35\ \boldsymbol{kN.m}$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\max}=\left|\boldsymbol{\sigma}_{c\max}\right|=\frac{\boldsymbol{N}}{2\boldsymbol{A}}+\frac{\boldsymbol{M}_{\max}}{2\boldsymbol{W_y}}=\frac{34.64\times10^3}{2\times29.299\times10^{-4}}+\frac{35\times10^3}{2\times152\times10^{-6}}$$

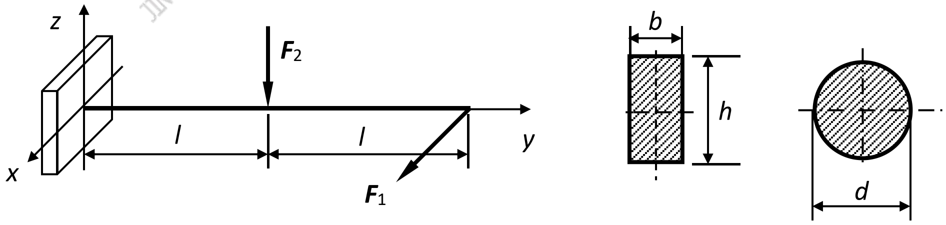
$$=5.9+115.1=121\ \boldsymbol{MPa}<1.05[\boldsymbol{\sigma}]$$

强度满足。

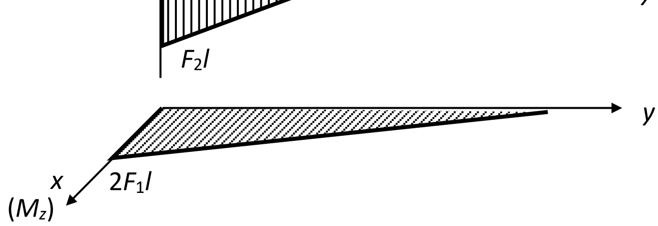
2、 图示悬臂梁,承受载荷 F_1 与 F_2 作用，已知 F_1=800 N，F_2=1.6 kN，l=1 m，许用应力[σ] =160 MPa,试分别在下列两种情况下确定截面尺寸。

(1) 截面为矩形，h=2b；

(2) 截面为圆形。



解：(1) 画弯矩图



固定端截面为危险截面

(2) 当横截面为矩形时，依据弯曲正应力强度条件：

$$\sigma_{\max}=\frac{M_x}{W_x}+\frac{M_z}{W_z}=\frac{F_2\cdot l}{\frac{b\cdot h^2}{6}}+\frac{2F_1\cdot l}{\frac{h\cdot b^2}{6}}=\frac{800\times10^3}{\frac{2b^3}{3}}+\frac{2\times1.6\times10^6}{\frac{b^3}{3}}\le[\sigma]=160\ MPa$$

解得：

$$b=35.6\ mm\qquad h=71.2\ mm$$

(3) 当横截面为圆形时，依据弯曲正应力强度条件：

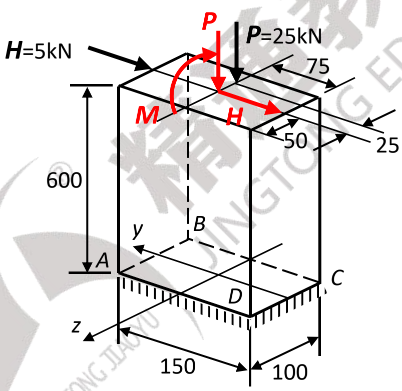
$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W}=\frac{\sqrt{M_x^{\,2}+M_z^{\,2}}}{W}=\frac{\sqrt{(F_2\cdot l)^2+(2F_1\cdot l)^2}}{\frac{\pi\cdot d^3}{32}}$$

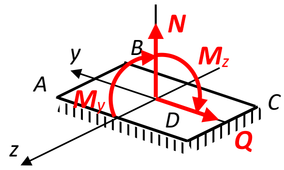
$$=\frac{\sqrt{(800\times10^3)^2+(2\times1.6\times10^6)^2}}{\frac{\pi\cdot d^3}{32}}\le[\sigma]=160\ MPa$$

解得：

$$d=52.4\ mm$$

3、在力 *P* 和 *H* 联合作用下的短柱如图所示。试求固定端截面上角点 *A*、*B*、*C*、*D* 的正应力。





参考答案：(1) 将力 *P* 和 *H* 向截面形心简化

$$M=25\times10^3\times0.025=625\ N.m$$

(2) 截面 *ABCD* 上的内力

$$N=-P=-25\ kN$$
$$M_y=M=625\ N.m$$
$$M_z=H\times0.6=3\ kN.m$$

(3) 截面几何性质

$$A = 0.15 \times 0.1 = 0.015\ \boldsymbol{m}^2$$

$$W_z = \frac{1}{6} \times 0.1 \times 0.15^2 = 3.75 \times 10^{-4}\ \boldsymbol{m}^3$$

$$W_y = \frac{1}{6} \times 0.15 \times 0.1^2 = 2.5 \times 10^{-4}\ \boldsymbol{m}^3$$

(4) A 点的正应力

$$\sigma_A = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{(-25 \times 10^3)}{0.015} + \frac{625}{2.5 \times 10^{-4}} + \frac{3000}{3.75 \times 10^{-4}}$$
$$= -1.67 \times 10^6 + 2.5 \times 10^6 + 8 \times 10^6 = 8.83\ \boldsymbol{MPa}$$

B 点的正应力

$$\sigma_B = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = (-1.67 - 2.5 + 8) \times 10^6 = 3.83\ \boldsymbol{MPa}$$

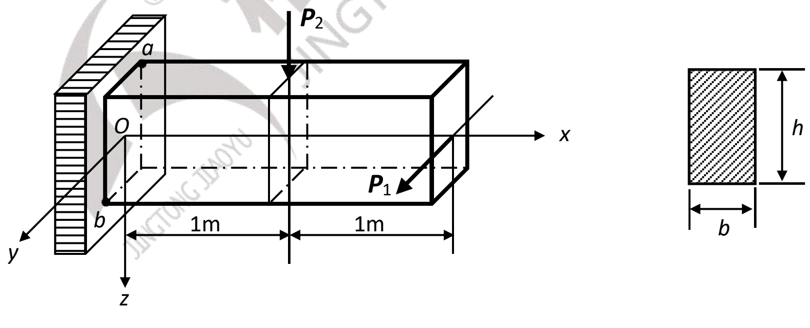
C 点的正应力

$$\sigma_C = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z} = (-1.67 - 2.5 - 8) \times 10^6 = -12.17\ \boldsymbol{MPa}$$

D 点的正应力

$$\sigma_D = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z} = (-1.67 + 2.5 - 8) \times 10^6 = -7.17\ \boldsymbol{MPa}$$

4、作用于悬臂木梁上的载荷为：xy 平面内的 P_1=800 N，xz 平面内的 P_2=1650 N。若木材的许用应力[σ]=10 MPa，矩形截面边长之比为 h/b=2，试确定截面的尺寸。



解：(1) 求内力

固定端弯矩最大

$$M_{z\max} = P_1 \times 2 = 1600\ \boldsymbol{Nm} \qquad M_{y\max} = P_2 \times 1 = 1650\ \boldsymbol{Nm}$$

(2) 求应力

木梁在 xy 平面弯曲而引起的固定端截面上的最大应力为

$$\sigma'_{\max} = \frac{M_{z\max}}{W_z} = \frac{M_{z\max}}{hb^2/6} = \frac{3M_{z\max}}{b^3}$$

木梁在 xz 平面弯曲而引起的固定端截面上的最大应力为

$$\sigma''_{\max}=\frac{M_{y\max}}{W_y}=\frac{M_{y\max}}{bh^2/6}=\frac{1.5M_{y\max}}{b^3}$$

(3) 强度计算

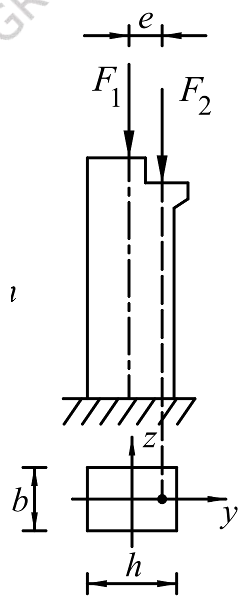
固定端截面上 a 点是最大拉应力点，b 点是最大压应力点，应力数值大小是

$$\sigma_{\max}=\sigma'_{\max}+\sigma''_{\max}=[\sigma] \qquad \frac{3M_{z\max}}{b^3}+\frac{1.5M_{y\max}}{b^3}=[\sigma]$$

$$b=\sqrt[3]{\frac{3M_{z\max}+1.5M_{y\max}}{[\sigma]}}=\sqrt[3]{\frac{3\times1600+1.5\times1650}{10\times10^6}}=90mm$$

$$h=2b=180mm$$

5、矩形截面受压柱如图所示，其中 F_1 的作用线与柱轴线重合，F_2 的作用点位于 y 轴上，已知 $F_1=F_2=80kN$，$b=240mm$，偏心距 $e=100mm$。试求柱的横截面上不出现拉应力时 h 的最小值，并在 h 确定后，求柱横截面上的最大压应力。



解：将 F_2 平移到柱轴线上，则柱为轴向压缩与弯曲的组合变形。

$$F_N=F_1+F_2=160kN \qquad M_z=F_2e=8kN\cdot m$$

柱的横截面上不出现拉应力时 h 取最小值，说明中性轴位于截面左侧边缘，

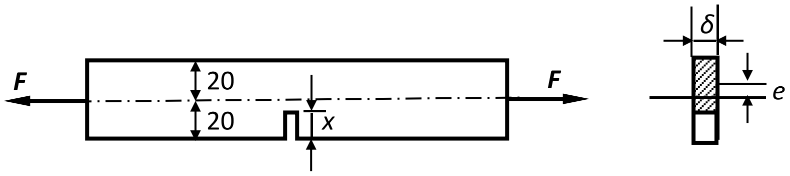
$$\sigma=-\frac{F_N}{A}+\frac{M_z}{W_z}=-\frac{160\times10^3}{240h}+\frac{8\times10^6}{\frac{240h^2}{6}}=0$$

$$h=300mm$$

此时，

$$\sigma_{c\max}=-\frac{F_N}{A}-\frac{M_z}{W_z}=-\frac{160\times10^3}{240\times300}-\frac{8\times10^6}{\frac{240\times300^2}{6}}=-4.44MPa$$

6、 图示板件，载荷 F=12 kN，许用应力[σ] =100 MPa，试求板边切口的允许深度 x。(δ=5 mm)



解：(1) 切口截面偏心距和抗弯截面模量：

$$e=\frac{x}{2} \qquad W=\frac{\delta(40-x)^2}{6}$$

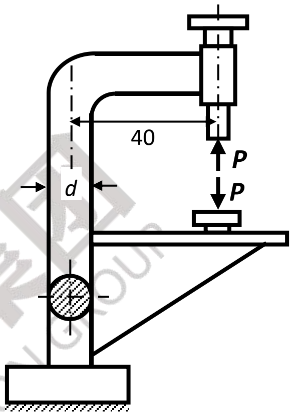
(2) 切口截面上发生拉弯组合变形；

$$\sigma_{\max}=\frac{Fe}{W}+\frac{F}{A}=\frac{12\times10^{3}\times\frac{x}{2}}{\frac{5\times(40-x)^{2}}{6}}+\frac{12\times10^{3}}{5\times(40-x)}=100MPa$$

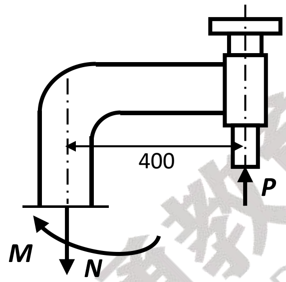
解得：

$$x=5.2\ mm$$

7、图示钻床的立柱为铸铁制成，P=15 kN，许用拉应力为$[\sigma_t]$=35 MPa。试确定立柱所需要的直径 d。



解：(1) 内力分析



如图作截面取上半部分，由静力平衡方程可得

$$N=P=15kN\qquad M=0.4P=6kNm$$

所以立柱发生拉弯变形。

(2) 强度计算

先考虑弯曲应力

$$\sigma_{t\max}=\frac{M}{W}=\frac{32M}{\pi d^{3}}\le[\sigma_t]$$

$$d\ge\sqrt[3]{\frac{32M}{\pi[\sigma_t]}}=\sqrt[3]{\frac{32\times6\times10^{3}}{\pi\times35\times10^{6}}}=120.4\ mm$$

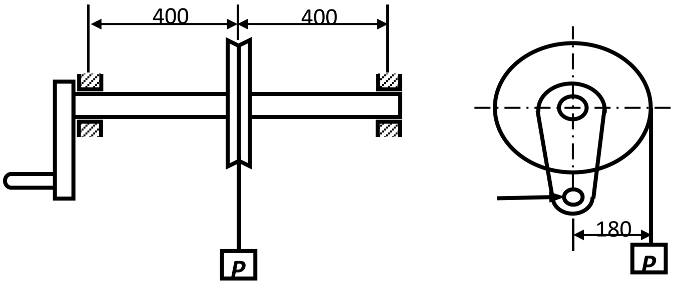
取立柱的直径 d = 122 mm，校核其强度

$$\sigma_{t\max}=\frac{N}{A}+\frac{M}{W}=\frac{4N}{\pi d^{2}}+\frac{32M}{\pi d^{3}}=\frac{4\times15\times10^{3}}{\pi\times0.122^{2}}+\frac{32\times6\times10^{3}}{\pi\times0.122^{3}}$$
$$=1.28+33.66=34.94MPa<[\sigma_t]$$

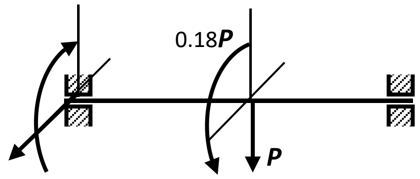
立柱满足强度要求。

注：在组合变形的截面几何尺寸设计问题中，先根据主要变形设计，然后适当放宽尺寸进行强度校核，这是经常使用的方法。

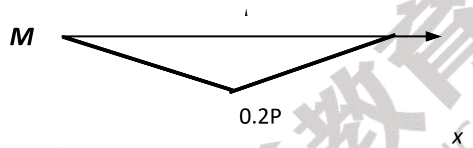
8、图示手摇铰车的轴的直径 d=30 mm，材料为 Q235 钢，[σ]=80 MPa。试按第三强度理论求铰车的最大起重量 P。

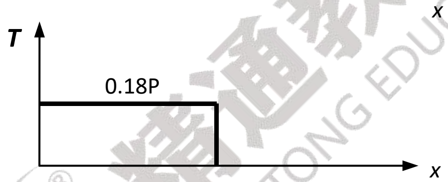


解：(1) 轴的计算简图



画出铰车梁的内力图





危险截面在梁中间截面左侧

$$M_{\max} = 0.2\boldsymbol{P} \qquad \boldsymbol{T} = 0.18\boldsymbol{P}$$

(2) 强度计算

第三强度理论

$$\sigma_{r3} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{M}^2 + \boldsymbol{T}^2}}{\boldsymbol{W}} = \frac{32}{\pi \boldsymbol{d}^3}\sqrt{(0.2\boldsymbol{P})^2 + (0.18\boldsymbol{P})^2} \le [\sigma]$$

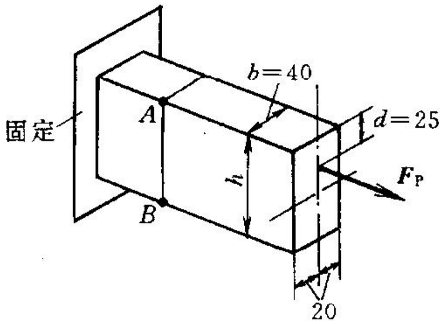
$$\boldsymbol{P} \le \frac{\pi \boldsymbol{d}^3[\sigma]}{32\sqrt{(0.2)^2 + (0.18)^2}} = \frac{\pi \times 0.03^3 \times 80 \times 10^6}{32\sqrt{(0.2)^2 + (0.18)^2}} = 788N$$

所以铰车的最大起重量为 788N

9、图示矩形截面杆在自由端承受位于纵向对称面内的纵向载荷 F_P，已知 $F_P = 60$kN。试求：

1．横截面上点 A 的正应力取最小值时的截面高度 h；

2．在上述 h 值下点 A 的正应力值。



解： $\sigma_A = \dfrac{F_{Nx}}{A} + \dfrac{M_z}{W_z} = \dfrac{F_P}{40h} + \dfrac{F_P(\dfrac{h}{2}-d)}{\dfrac{40h^2}{6}}$

$$= \frac{F_P}{20}(\frac{2h-3d}{h^2}) \qquad (1)$$

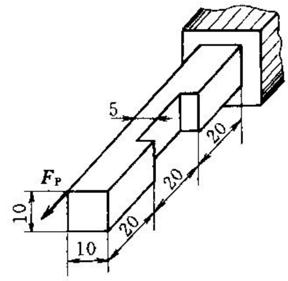
1．令 $\dfrac{\partial \sigma_A}{\partial h} = 0$， $\dfrac{6hd-2h^2}{h^4} = 0$

∴ $h = 3d = 75\text{mm}$ （2）

2．由（1）、（2）式得：

$$\sigma_A = \frac{60\times10^3}{20}(\frac{2\times75-3\times25}{75^2}) = 40\ \text{MPa}$$

10、正方形截面杆一端固定，另一端自由，中间部分开有切槽。杆自由端受有平行于杆轴线的纵向力 $\boldsymbol{F}_P$。若已知 F_P =1kN，杆各部分尺寸示于图中。试求杆内横截面上的最大正应力，并指出其作用位置。



解： $A = 5\times10\times10^{-6} = 50\times10^{-6}\ \text{m}^2$

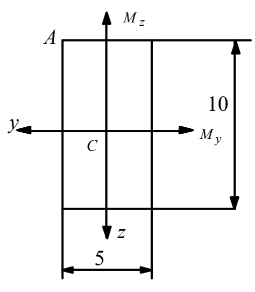
$$W_y = \frac{5\times10^{-2}}{6}\times10^{-9} = \frac{1}{12}\times10^{-6}\ \text{m}^3$$

$$W_z = \frac{10\times5^2}{6}\times10^{-9} = \frac{1}{24}\times10^{-6}\ \text{m}^3$$

$F_{Nx} = 1\ \text{kN}$

$M_y = 1000\times5\times10^{-3} = 5\ \text{N·m}$

$M_z = 1000\times2.5\times10^{-3} = 2.5\ \text{N·m}$

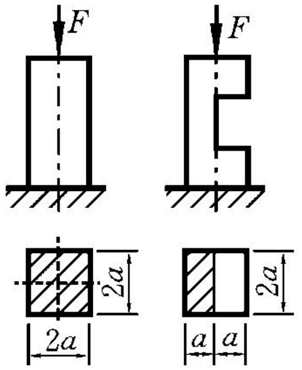


$$\sigma_{max} = \frac{F_{Nx}}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}$$

$$= \left(\frac{1000}{50} + \frac{5}{\frac{1}{12}} + \frac{2.5}{\frac{1}{24}}\right)\times10^6 = 140\ \text{MPa}$$

最大正应力作用位置位于中间开有切槽的横截面的左上角点 A，如图（a）所示。

11、在正方形截面短柱的中部开一槽，其面积为原面积的一半，问最大压应力增大几倍？



解：未开槽短柱受轴载作用，柱内各点压应力为

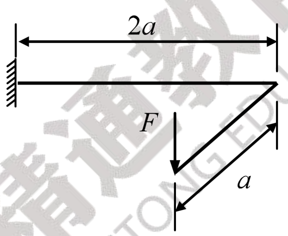
$$s = \frac{F_N}{A} = \frac{F}{4a^2}$$

开槽短柱削弱段受偏心压力，最大压应力为

$$s_{\max} = \frac{F_N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{F}{2a^2} + \frac{F \times a/2}{2a \times a^2/6} = 8 \times \frac{F}{4a^2}$$

故最大压应力增大 7 倍

12、直径为 20mm 的圆截面折杆受力情况如图所示，已知：F＝0.2kN，材料的许用应力为 $[\sigma]=170\text{MPa}$。试用第三强度理论确定折杆的长度 a 的许用值。



解答：

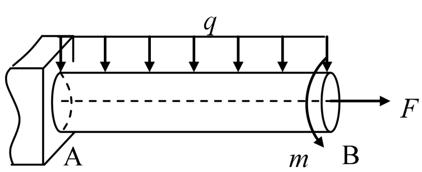
在危险截面 A 上危险点在七上下边缘 $|M|=2Fa, |T|=Fa$

由第三强度理论 $\sigma_{r3}=\frac{1}{W}\sqrt{M^2+T^2}=\frac{\sqrt{(2\times0.2\times a)^2+(0.2\times a)^2}}{\frac{\pi\times0.02^3}{32}}\le[\sigma]=170\times10^6$

$\therefore a\le0.29855m$

取 $[a]=299mm$

13、一端固定的圆杆，直径为 d，长度为 l，载荷如图，指出危险截面、危险点的位置，写出危险点的应力式，按第三强度理论的相当应力式。



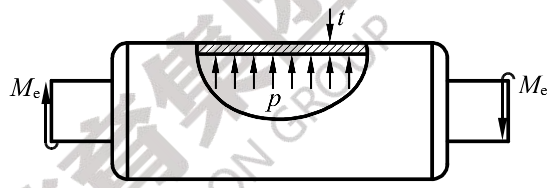
解答：

危险截面在 A 截面，危险点在其最上边缘，在危险点上有

$$\sigma = \frac{4F}{\pi d^2} + \frac{\frac{ql^2}{2}}{\frac{\pi d^3}{32}};\tau = \frac{m}{\frac{\pi d^3}{16}}$$

按第三强度理论 $\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{4F}{\pi d^2} + \frac{\frac{ql^2}{2}}{\frac{\pi d^3}{32}}\right)^2 + 4\left(\frac{m}{\frac{\pi d^3}{16}}\right)^2}$

14、图示封闭薄壁圆筒，内径 $d = 100$ mm，壁厚 $t = 2$ mm，承受内压 $p = 4$ MPa，外力偶矩 $M_e = 0.192$ kN·m。求靠圆筒内壁任一点处的主应力。



解：$\tau_x = \dfrac{0.192 \times 10^3}{\dfrac{\pi(0.104^4 - 0.1^4)}{32}} \times 0.05 = 5.75$ MPa

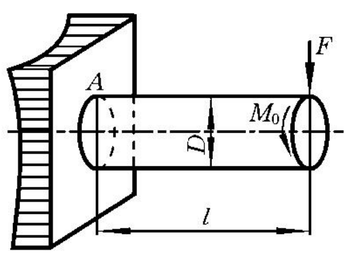
$$\sigma_x = \frac{pd}{4t} = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \frac{pd}{2t} = 100 \text{ MPa}$$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max} \\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\ 2}} = \begin{matrix}100.7 \\ 49.35\end{matrix} \text{ MPa}$$

$\sigma_1 = 100.7$ MPa，$\sigma_2 = 49.35$ MPa，$\sigma_3 = -4$ MPa

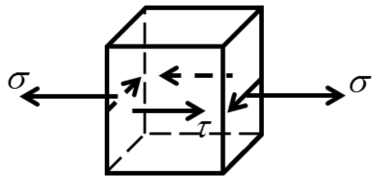
15、圆截面直杆受力如图所示。试用单元体表示 A 点的应力状态。已知 F=39.3N，M_0=125.6Nm，D=20mm，杆长 l=1m。



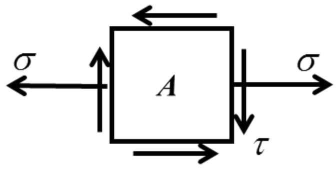
解：按杆横截面和纵截面方向截取单元体

$$s = \frac{M}{W} = \frac{32Fl}{pD^3} = \frac{32\text{创}39.3\quad 1}{p\acute{}\ 0.02^3} = 50.04MPa$$

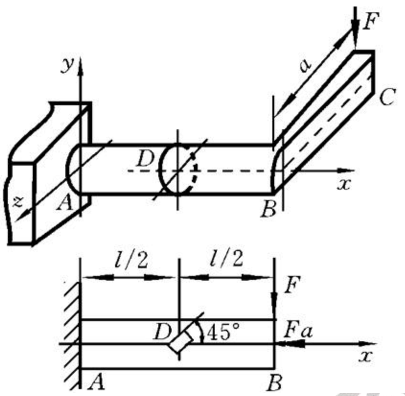
$$t = \frac{T}{W_p} = \frac{16M_0}{pD^3} = \frac{16\acute{}\ 125.6}{p\acute{}\ 0.02^3} = 79.96MPa$$



单元体可画成平面单元体如图(从上往下观察)



16、图示直角曲拐，C 端受铅垂集中力 F 作用。已知 a=160mm，AB 杆直径 D=40mm，l=200mm ，E=200GPa， μ=0.3，实验测得 D 点沿 45º 方向的线应变 $\varepsilon_{45^\circ}=0.265\times10^{-3}$。试求：（1）力 F 的大小；（2）若 AB 杆的[σ]=140MPa，试按最大切应力理论校核其强度。



解：测点在中性轴处为纯剪切应力状态，且有

$$\tau=\frac{Fa}{W_p}-\frac{4}{3}\times\frac{F}{A}=\frac{16F}{\pi D^2}\left(\frac{a}{D}-\frac{1}{3}\right)=\frac{E}{1+\mu}\varepsilon_{45^\circ}$$

则：$F=\dfrac{E\times\varepsilon_{45^\circ}}{1+\mu}\times\dfrac{\pi D^2}{16\times(4-1/3)}=3.493kN$

危险截面 A 处内力大小为（不计剪力）

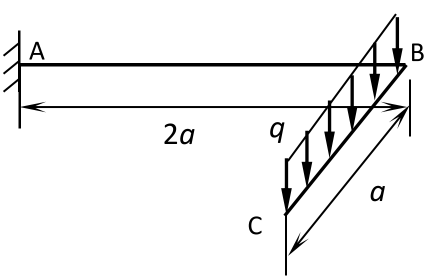
$T=Fa \quad M=Fl$

按最大切应力理论校核强度：

$$\sigma_{r3}=\frac{\sqrt{M^2+T^2}}{W}=\frac{F\sqrt{l^2+a^2}}{\pi D^3/32}=142.39MPa<1.05[\sigma]$$

满足强度要求

17．直径为 30mm 的圆截面水平直角折杆，在 BC 段受垂直均布力 $q=0.2KN/m$，已知 $[\sigma]=160MPa$。试用第三强度理论确定 a 的许可值。



解：该杆的危险截面在 A 点，为弯扭组合变形

$$M_A = 2qa^2 \qquad T_A = 0.5qa^2$$

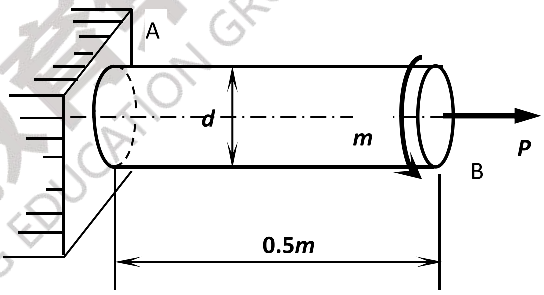
由第三强度条件

$$\sigma_{r3} = \frac{\sqrt{M_A^2 + T_A^2}}{W_Z} = \frac{\sqrt{\left(2qa^2\right)^2 + \left(0.5qa^2\right)^2}}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{32\sqrt{4.25}qa^2}{\pi d^3} \le [\sigma]$$

$$\therefore a \le \sqrt{\frac{160 \times \pi \times 30^3}{\sqrt{4.25} \times 0.2 \times 32}} = 1013mm$$

所以，[a]=1013mm。

18、钢制圆轴受力如图，已知该轴直径 d=50mm，许用应力[σ]=160MPa，外力 P=40KN，m=1.5KN.m，试用第三强度理论校核该轴强度。



解：

（1）构件的内力方程

轴力方程：

$$N(x) = P = 40KN \quad (0 \le x \le 0.5)$$

扭矩方程：

$$T(x) = m = 1.5KN.m \quad (0 \le x \le 0.5)$$

（2）从内力方程可知：危险点为构件的外边缘

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{4 \times P_1}{\pi \times d^2} = \frac{4 \times 40 \times 10^3}{\pi \times 50^2} = 20.38MPa$$

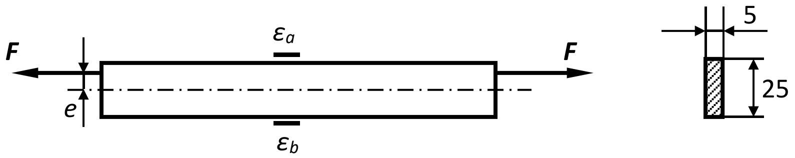
$$\tau = \frac{T_A}{W_P} = \frac{m \times 16}{\pi \times d^3} = \frac{1.5 \times 10^6 \times 16}{\pi \times 50^3} = 61.15MPa$$

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{20.38^2 + 4 \times 61.15^2} = 124MPa < [\sigma]$$

故构件满足第三强度条件。

19、图示矩形截面钢杆，用应变片测得其上、下表面的轴向正应变分别为ε_a=1.0×10^{-3} 与

ε_b=0.4×10^{-3}，材料的弹性模量 E=210Gpa。试绘横截面上的正应力分布图。并求拉力 F 及偏心距 e 的数值。

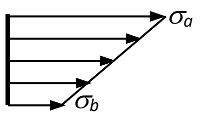


解：(1) 杆件发生拉弯组合变形，依据胡克定律知：

$$\sigma_a = \varepsilon_a \cdot E = 1.0\times10^{-3}\times210\times10^3 = 210\ MPa$$

$$\sigma_b = \varepsilon_b \cdot E = 0.4\times10^{-3}\times210\times10^3 = 84\ MPa$$

横截面上正应力分布如图：



(2) 上下表面的正应力还可表达为：

$$\sigma_a = \frac{M}{W}+\frac{N}{A}=\frac{F\cdot e}{\frac{b\cdot h^2}{6}}+\frac{F}{b\cdot h}=210\ MPa$$

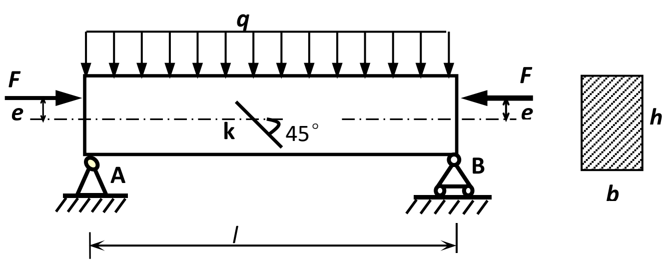
$$\sigma_b = -\frac{M}{W}+\frac{N}{A}=-\frac{F\cdot e}{\frac{b\cdot h^2}{6}}+\frac{F}{b\cdot h}=84 MPa$$

将 b、h 数值代入上面二式，求得：

$$F = 18.38\ mm \qquad e = 1.785\ mm$$

20、矩形截面梁受力如图。已知梁上的均布荷载 q=20kN/m，偏心压力 F=1500kN，偏心距 e=80mm，跨度 l=2m，截面尺寸 b=240mm，h=500mm，弹性模量 E=20GPa，泊松比ν=0.3。求

（1）跨中截面 k 点沿 45° 方向的线应变；（2）跨中截面下边缘点沿轴向的线应变ε。



解：（1）跨中截面内力：

轴力：$N = -1500kN$

剪力：V=0

弯矩：$\mathrm{M} = Pe+\frac{1}{8}ql^2 = 1500\times80\times10^{-3}+\frac{1}{8}\times20\times2^2 = 130\mathrm{kN}.m$

所以 k 点为单向受力状态，且$\sigma_x = \dfrac{N}{A} = \dfrac{-1500\times10^3}{240\times500} = -12.5MPa$

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2}\cos 90^\circ = -6.25MPa$$

$$\sigma_{-45^\circ} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2}\cos\left(-90^\circ\right) = -6.25MPa$$

$$\varepsilon_{-45^\circ} = \frac{1}{\mathrm{E}}\left(\sigma_{-45^\circ} - \upsilon\sigma_{45^\circ}\right) = \frac{(1-0.3)\times(-6.25)}{20\times10^3} = -2.19\times10^{-4}$$

（2）跨中截面下边缘处于单向应力状态

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M}{W_z} = \frac{-1500\times10^3}{240\times500} + \frac{130\times10^6\times6}{240\times500^2} = 0.5MPa$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{\mathrm{E}} = \frac{0.5}{20\times10^3} = -0.25\times10^{-4}$$

第十二章　压杆稳定

1、 有一长 l=300 mm，截面宽 b=6 mm、高 h=10 mm 的压杆。两端铰接，压杆材料为 Q235 钢，E=200 GPa，试计算压杆的临界应力和临界力。

参考答案：（1）求惯性半径 i

对于矩形截面，如果失稳必在刚度较小的平面内产生，故应求最小惯性半径

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{hb^3}{12}\times\frac{1}{bh}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{6}{\sqrt{12}} = 1.732\ \text{mm}$$

（2）求柔度 λ

$$\lambda = \mu l/i,\quad \mu=1,$$

故 $\lambda=1\times300/1.732=519>\lambda_p=100$

（3）用欧拉公式计算临界应力

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 20\times10^4}{(173.2)^2} = 65.8\ \text{MPa}$$

（4）计算临界力

$$F_{cr} = \sigma_{cr}\times A = 65.8\times6\times10 = 3948\ \text{N} = 3.95\ \text{kN}$$

2、一根两端铰支钢杆，所受最大压力$P = 47.8KN$。其直径$d = 45mm$，长度$l = 703mm$。钢材的 E=210GPa，σ_p=280MPa，$\lambda_2 = 43.2$。计算临界压力的公式有：(a) 欧拉公式；(b) 直线公式σ_{cr}=461-2.568λ(MPa)。

试　（1）判断此压杆的类型；

（2）求此杆的临界压力；

参考答案：（1） $\mu=1$ $\lambda_1=\sqrt{\dfrac{\pi^2 E}{\sigma_P}}=86$ $\lambda=\dfrac{\mu l}{i}=\dfrac{\mu l}{\frac{d}{4}}=62.5$

由于 $\lambda_2<\lambda<\lambda_1$，是中柔度杆。 （2）$\sigma_{cr}$ =461-2.568λ MPa
$P_{cr}=\sigma_{cr}A=478KN$

3、一端固定另一端自由的细长压杆，其杆长 l = 2m，截面形状为矩形，b = 20 mm、h = 45 mm，材料的弹性模量 E = 200GPa 。试计算该压杆的临界力。
参考答案：
（1）计算压杆的柔度

$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{2\times 2000}{20/\sqrt{12}}=692.8>\lambda_c=123$$ (所以是大柔度杆，可应用欧拉公式)

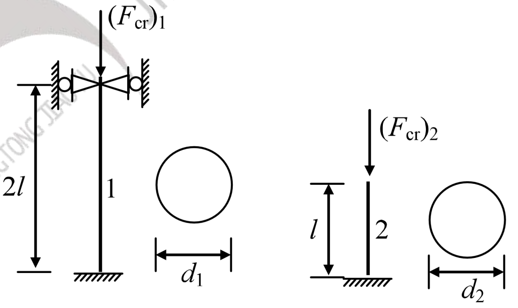
(2)计算截面的惯性矩
由前述可知，该压杆必在 xy 平面内失稳，故计算惯性矩

$$I_y=\frac{hb^3}{12}=\frac{45\times 20^3}{12}=3.0\times 10^4 mm^4$$

（3）计算临界力

μ = 2，因此临界力为 $Fcr=\dfrac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}=\dfrac{\pi^2\times 200\times 10^9\times 3\times 10^{-8}}{(2\times 2)^2}=3701N=3.70kN$

4、图中的 1、2 杆材料相同，均为圆截面压杆，若使两杆的临界应力相等。试求两杆的直径之比 d_1/d_2，以及临界力之比 $(F_{cr})_1/(F_{cr})_2$。并指出哪根杆的稳定性好。



解答：由临界应力总图可知，σ_{cr} 相同，则 λ 值相同，$\lambda_1=\lambda_2$

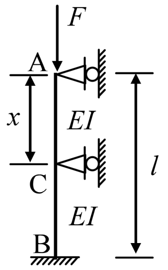
对 1 杆， $\lambda=\dfrac{\mu_1\mu_1}{i_1}=\dfrac{\mu_1\mu_1}{\sqrt{\dfrac{I_1}{A_1}}}=\dfrac{\mu_1\mu_1}{\dfrac{d_1}{4}}=\dfrac{4\mu_1\mu_1}{d_1}$

对 2 杆， $\lambda=\dfrac{\mu_2\mu_2}{i_2}=\dfrac{\mu_2\mu_2}{\sqrt{\dfrac{I_2}{A_1}}}=\dfrac{\mu_2\mu_2}{\dfrac{d_2}{4}}=\dfrac{4\mu_2\mu_2}{d_2}$

故： $\dfrac{d_1}{d_2}=\dfrac{\mu_1 l_1}{\mu_2 l_2}=\dfrac{0.7\times 2l}{2\times l}=0.7$ $\dfrac{F_{cr1}}{F_{cr2}}=\dfrac{\sigma_{cr1}\bullet A_1}{\sigma_{cr2}\bullet A_2}=\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{d_1^2}{d_2^2}=0.49$

$\therefore F_{cr1} > F_{cr2}$，即 2 杆稳定性好些。

5、图示压杆，AC、CB 两杆均为细长压杆，问 x 为多大时，承载能力最大？并求此时承载能力与 C 处不加支撑时承载能力的比值。



解答：1）承载能力最大的条件是 AC 杆和 BC 杆同时达到临界力，且相同

即：
$$F_{\mathrm{cr}AC} = \frac{\pi^2 EI}{x^2} = F_{\mathrm{crBC}} = \frac{\pi^2 EI}{\left[0.7(l-x)\right]^2}$$

即：
$$x = 0.7(l-x)$$
$$x = 0.412l$$

2）对所承载的力与 C 处不加支撑是承载的力的比值

$$\frac{F_{crAC}}{F_{crAB}} = \frac{\dfrac{\pi^2 EI}{(0.412l)^2}}{\dfrac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}} = \frac{0.7^2}{0.412^2} = 2.89$$

6、校核两端固定矩形截面压杆的稳定性。已知 l＝3m，F＝100kN，b＝40mm，h＝60mm。材料的弹性模量 E＝200GPa，$\sigma_{\mathrm{p}} = 196\mathrm{MPa}$，稳定安全因数 n_{st}＝3。

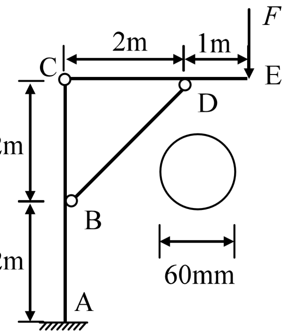
解答：
$$\because \lambda_p = \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = 100, \lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{\mu l}{\sqrt{\dfrac{I}{A}}} = \frac{ul}{\dfrac{b}{\sqrt{12}}} = 130 > \lambda_p$$

$$\therefore F_{\mathrm{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5l)^2} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9 \times \dfrac{0.06 \times 0.04^3}{12}}{(0.5 \times 3)^2} = 281kN$$

$$\because \frac{F_{cr}}{F} = \frac{281}{100} = 2.81 < n_{st} = 3$$

故压杆不符合稳定条件。

7、试确定图示结构中压杆 BD 失稳时的临界载荷 F 值。已知：E＝2×10^{5}MPa，$\sigma_p = 200\mathrm{MPa}$。



解答：取研究对象，画受力图如图，其中 BD 杆受拉

$$\sum M_c = 0$$

$$F_{crBD} \bullet \sin 45^\circ \times 2 = F_{cr} \times 3$$

$$\therefore F_{cr} = \frac{\sqrt{2}}{3} F_{crBD}$$

对于 BD 杆，

$$\lambda_{BD} = \frac{\mu l}{i} = \frac{1\times 2\sqrt{2}}{\frac{0.06}{4}} = 188.6 > \lambda_p = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi\sqrt{\frac{2\times 10^5}{200}} = 99.3$$

$$\therefore F_{crBD} = \sigma_{crBD} \bullet A = \frac{\pi^2 EI}{\lambda_{BD}^2} \bullet A = \frac{\pi^2 \times 2\times 10^{11} \times \frac{\pi\times 0.06^2}{4}}{188.6^2} = 157kN$$

代入得：

$$F_{cr} = \frac{\sqrt{2}}{3} \times 157 = 74kN$$

8、已知一端固定、一端球铰的圆截面压杆的最大工作压力为 4kN，其长度 l=1.25m, 规定的 nst=6， 材料的 σp=220MPa，E=210GPa，试确定压杆截面直径 d。

解：压杆的直径未定，故无法确定其柔度和临界应力公式，先假设为细长杆。

由稳定条件：$F_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \geq n_{st} F_{\max}$ $\quad \mu = 0.7 \quad I = \dfrac{\pi d^4}{64}$

$$d \geq \left[\frac{64\times n_{st} F_{\max} (\mu l)^2}{\pi^3 E}\right]^{1/4} = \left[\frac{64\times 6\times 4\times 10^3\times (0.7\times 1.25)^2}{\pi^3\times 210\times 10^9}\right]^{1/4} m = 0.0206m = 20.6mm$$

计算压杆柔度

$$i = \sqrt{I/A} = \sqrt{\frac{\pi d^4/64}{\pi d^2/4}} = \frac{d}{4} \qquad \lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0.7\times 1250}{20.6/4} = 170$$

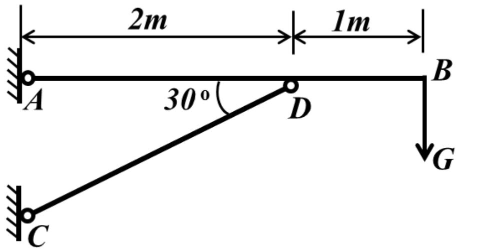
$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2\times 210\times 10^9}{220\times 10^6}} = 97 \qquad \lambda > \lambda_p$$

压杆为大柔度杆的假设成立，则前面按欧拉公式和稳定条件确定的截面直径有效。

取：$d = 22mm$

9、简易吊车最大起吊重量 G=50kN，CD 压杆为空心圆杆,其内、外径分别为 d=6cm, D=8cm，

材料为 Q235 钢，λp=100，　λs=57，E=200GPa，稳定安全系数 nst=4，试校核压杆稳定性。



解：确定压杆的柔度。

$$i=\sqrt{\frac{I}{A}}=\sqrt{\frac{pD^4(1-a^4)/64}{pD^2(1-a^2)/4}}=\frac{D}{4}\sqrt{1+a^2}$$

$$=\frac{0.08}{4}\sqrt{1-\left(\frac{0.06}{0.08}\right)^2}=0.025m$$

两端铰支压杆：$m=1\quad l=2/\cos 30^{\circ}=2.309m$

$l=\frac{ml}{i}=\frac{1'\ 2.309}{0.025}=92.36\qquad l_s<l<l_p$　CD 压杆为中长杆

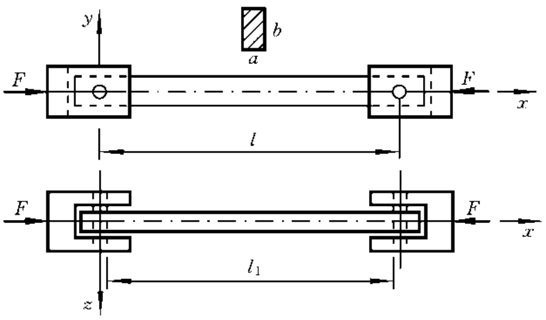
$s_{cr}=a-bl=304-1.12棒92.36\quad 201MPa$

$F_{cr}=s_{cr}\ A\quad 201创10^6\quad p(0.08^2-0.06^2)/4(N)=442kN$

由平衡条件：　$å\ M_A=0\quad F_{NCD}\sin 30^{\circ}{'}\ 2=G'\ 3\quad F_{NCD}=3G=150kN$

$n=\frac{F_{cr}}{F}=\frac{442}{150}=2.95<n_{st}$ CD 压杆稳定性不够

10、由 Q235 钢组成的矩形截面压杆，其两端用铰销支承。已知截面尺寸：a=40mm，b=60mm。设 l=2.1m，l1=2m，E=205GPa，σp=200MPa，试求此压杆的临界压力。



解：首先确定压杆的柔度。截面对其两个形心主轴的惯性半径不同，且压杆在两个主惯性平面内的支承情况也不同，应分别计算。

$$i_z=\sqrt{\frac{I_z}{A}}=\sqrt{\frac{ab^3/12}{ab}}=\frac{b}{\sqrt{12}}=17.32mm$$

$$i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}=\sqrt{\frac{ba^3/12}{ab}}=\frac{a}{\sqrt{12}}=11.55mm$$

xy 平面内为两端铰支：$\lambda_z=\frac{\mu l}{i_z}=\frac{1\times 2100}{17.32}=121.2$

xz 平面内为两端固定：$\lambda_y=\frac{\mu l_1}{i_y}=\frac{0.5\times 2000}{11.55}=86.6$

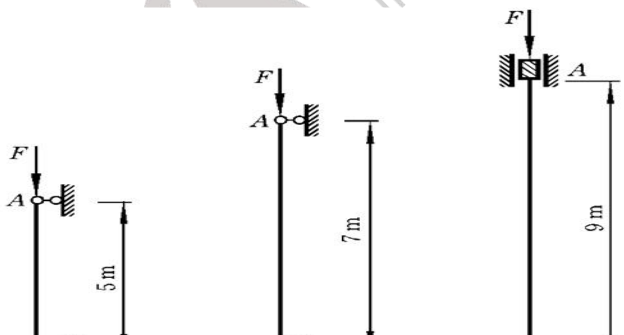
$$\lambda=\lambda_{\max}=\lambda_z=121.2$$

判断临界压力的适用公式：$\lambda_p=\sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}=\sqrt{\frac{\pi^2\times 205\times 10^9}{200\times 10^6}}=100.6<\lambda$

此压杆为细长杆，有：$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}=\frac{\pi^2\times 205\times 10^9}{121.2^2}Pa=137.7MPa$

$$F_{cr}=\sigma_{cr}\times A=330.5kN$$

11、如图所示各压杆的直径 d 均相同，且 d=16cm，材料均为 Q235 钢。试判断哪一种压杆的临界载荷 Fcr 最大?



解：$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}=\frac{\pi^2 EA}{\lambda^2}\quad(\lambda>100)\qquad \lambda=\frac{\mu l}{i}$

$$i=\sqrt{\frac{I}{A}}=\sqrt{\frac{\pi d^4/64}{\pi d^2/4}}=\frac{d}{4}=40mm$$

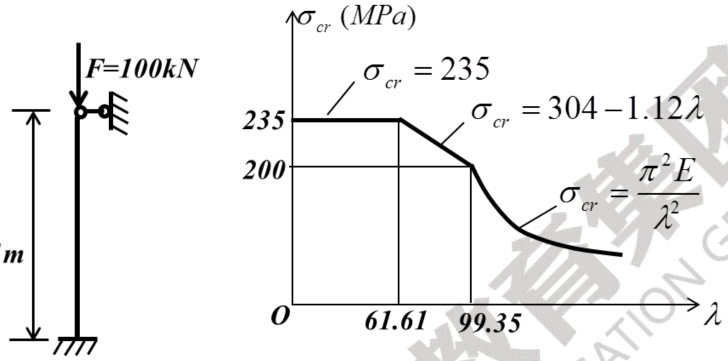
$(a)\quad \mu = 1 \quad \lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{5}{0.04} = 125$

$(b)\quad \mu = 0.7 \quad \lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0.7\times 7}{0.04} = 122.5$

$(c)\quad \mu = 0.5 \quad \lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0.5\times 9}{0.04} = 112.5$

故压杆 C 的临界载荷 Fcr 最大

12、图示杆件由 Q235 钢制成，该材料的弹性极限σp=200MPa，屈服极限σs= 235MPa ，弹性模量 E=200GPa，中长杆经验公式σcr=304 -1.12λ ，其中σcr 单位为 MPa， λ为压杆的柔度。（1）试画临界应力总图并在图中标出特征点。（2）图中杆为 d=35mm 的实心圆杆，稳定安全系数 nst=2.4，试校核该杆的稳定性。



解： (1) $\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 200\times 10^9}{200\times 10^6}} = 99.35$

$$\lambda_s = \frac{304-\sigma_s}{1.12} = \frac{304-235}{1.12} = 61.61$$

(2) 计算压杆的柔度

$$\mu = 0.7 \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{d}{4} \quad \lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0.7\times 1}{0.035/4} = 80$$

$\lambda_s < \lambda < \lambda_p$ 该压杆为中长杆

$$\sigma_{cr} = 304-1.12\lambda = 304-80\times 1.12 = 214.4(MPa)$$

压杆应力为

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi d^2} = \frac{4\times 100\times 10^3}{\pi\times 0.035^2}Pa = 103.9MPa$$

$n = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma} = \frac{214.4}{103.9} = 2.06 < 2.4$ 该压杆稳定性不足

13、校核两端固定矩形截面压杆的稳定性。已知 *l*＝3m，*F*＝100kN，*b*＝40mm，*h*＝60mm。材料的弹性模量 *E*＝200GPa，$\sigma_P = 196\text{MPa}$，稳定安全因数 n_{st}＝2.5。

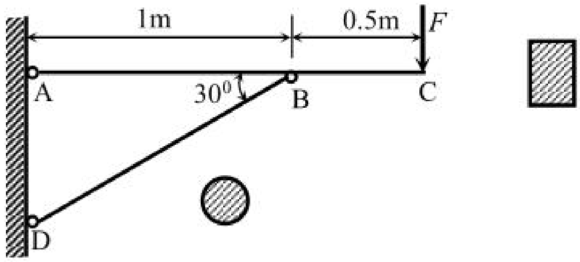
解答：$\because \lambda_p = \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = 100, \lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{\mu l}{\sqrt{\frac{I}{A}}} = \frac{ul}{\frac{b}{\sqrt{12}}} = 130 > \lambda_p$

$$\because \frac{F_{cr}}{F} = \frac{281}{100} = 2.81 > n_{st} = 2.5$$

故压杆符合稳定条件。

14、图示托架，其斜杆 BD 为直径 d=20mm 的圆截面杆，水平杆 AC 为 100mm×150mm 的矩形截面杆，已知两杆材料的弹性模 E=200GPa，材料的许用应力

[σ]=170MPa，材料柔度的界限值 λ_p =100，稳定安全系数 n_{st} =2.5，非细长压杆的临界应力公式为 σ_{cr} =240-0.00682 λ^2 (MPa)，荷载 F=50kN，试校核此结构的安全性。



解：1、校核 AC 杆件：B 截面左侧为危险截面

$$F_N = 129.9kN \quad M_{\max} = 25kN.m$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{AC}} + \frac{F_N}{A_{AC}}$$

$$= \frac{25000\times 6}{0.1\times 0.15^2} + \frac{129900}{0.1\times 0.15}$$

$$= 73.5MPa < [\sigma]$$

2、校核 BD 杆件的稳定性

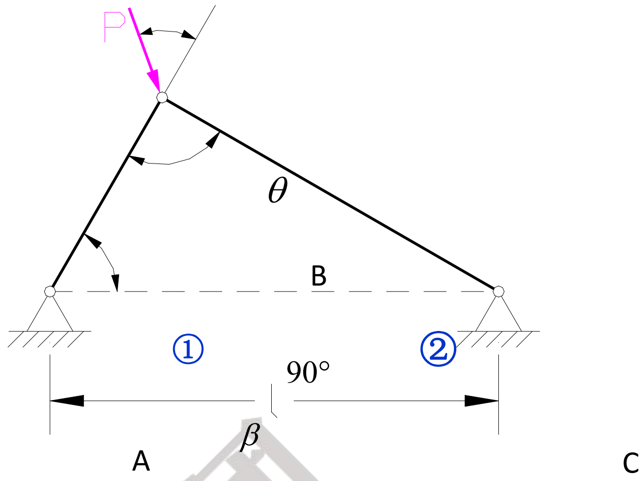
$$\lambda = \frac{\mu l_{BD}}{i_{BD}} = \frac{1\times(1000/\cos 30^0)}{60/4} = 76.98 < 100$$

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A_{BD} = (240 - 0.00682\times 76.98^2)\times \frac{\pi\times 60^2}{4} = 564.31kN$$

$$\frac{F_{cr}}{F_{BD}} = \frac{564.31}{150} = 3.76 > 2.5$$

满足强度和稳定条件

15、图示结构，①、②两细长压杆截面和材料相同。若由于构件在 ABC 平面内失稳而引起破坏，试确定使载荷 P 为最大时的θ角（设 0<θ<π/2）。（10 分）



解：由 B 节点的平衡条件可得：

$$N_1 = P\cos\theta$$

$$N_2 = P\sin\theta \qquad （2 分）$$

两杆为细长杆，临界力分别为：

$$P_{cr1} = \frac{\pi^2 EI}{l_1^2},$$
$$P_{cr2} = \frac{\pi^2 EI}{l_2^2} \qquad （4 分）$$

要使 P 最大，①、②杆应同时达到临界状态，即

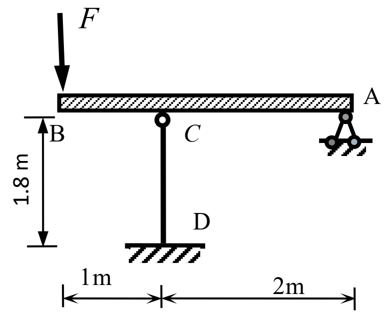
$$P\cos\theta = \frac{\pi^2 EI}{l_1^2}；\quad P\sin\theta = \frac{\pi^2 EI}{l_2^2} \qquad （2 分）$$

将两式相除可得：

$$tg\theta = \frac{l_1^2}{l_2^2} = ctg^2\theta$$

由此得 $\theta = arctg(ctg^2\theta)$ （2 分）

16、 图示结构中 AB 为刚性杆件，圆杆 CD 的直径 d=50mm，E=200GPa，λ_P=100，λ_S=60，直线经验公式：$\sigma_{cr} = 304 - 1.12\lambda$，稳定安全系数 n_{st}=2。试确定结构的许可荷载[F]。



解： 由 $\sum M_B = 0$ 可得

$$N_{CD} = \frac{2}{3}F \qquad （压力）$$

AB 杆为压杆，应保证其不失稳，所以做稳定计算

柔度：$\lambda = \dfrac{ul_{CD}}{i} = \dfrac{4ul}{d} = \dfrac{4\times0.7\times1.8\times1000}{50} = 100.8 > \lambda_P$

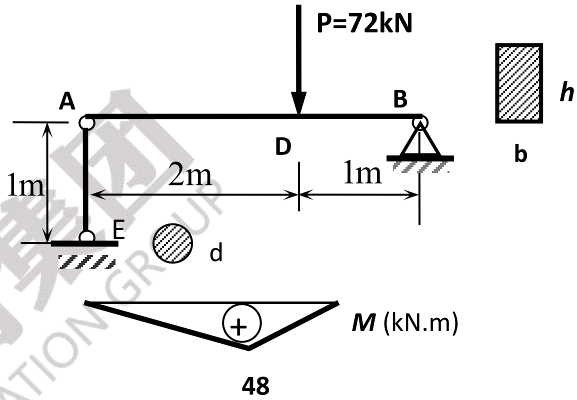
所以，杆 CD 为大柔度杆

$$N_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}\cdot A=\frac{\pi^3\times200\times10^3\times50^2}{4\times100.08^2}=386.4\text{kN}$$

$$\left[N_{\text{CD}}\right]=\frac{N_{cr}}{n_{st}}=\frac{386.4}{2}=\frac{2}{3}\left[F\right]$$

$\left[F\right]=289.8\text{kN}$ 所以，结构的许可荷载 $\left[F\right]=289.8\text{kN}$

17、矩形形截面梁 ADB，已知 b=100mm，*h*=150mm，材料许用应力[σ]=150MPa。柱 AE 横截面为圆形，直径 d=30mm，材料的弹性模量 E=200GPa，判别柔度λ_p=100，直线经验公式为：σ_{cr}=a-bλ；稳定安全系数 n_{st}=2，两端铰支。试校核结构是否安全。（14 分）



解：（1）研究 AB 梁

$$R_A=24kN \qquad R_B=48kN$$

作 AB 梁的弯矩图如右。

由弯矩图可知，危险截面为 D $M_D=M^{+}_{\max}=48KN\cdot m$

D 截面校核

$$\left(\sigma_{\max}\right)_{\text{D}}=\frac{M_D\cdot}{\text{W}_Z}=\frac{48\times10^6\times6}{100\times150^2}=128MPa<\left[\sigma_c\right]$$

故 AB 梁的强度条件满足。

（2）对 AD 柱： $N_{AD}=24\text{kN}(\text{压})$，需进行稳定性计算。

柔度：$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{1000}{30/4}=133.3>\lambda_P$ 故可用欧拉公式计算其临界力。

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}=\frac{\pi^2\times200\times10^3\times\frac{1}{64}\times\pi\times30^4\times10^{-3}}{1000^2}=78.36KN$$

$$N_{AD}=24kN<\left[N_{AD}\right]=\frac{P_{cr}}{n_{st}}=\frac{78.36}{2}=39.18KN$$ 故压杆稳定性满足。

综上，结构安全。