

## 《材料力学》冲刺卷 1

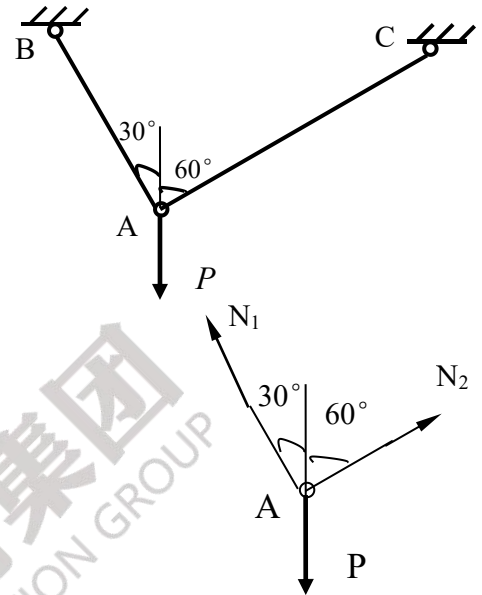
1、(25分)如图所示结构,在 A 点作用竖直向下的力 P。已知杆 AB 的直径  $d_1=40\text{mm}$ ,  $[\sigma]_1=80\text{MPa}$ ; AC 杆的直径  $d_2=25\text{mm}$ ,  $[\sigma]_2=160\text{MPa}$ , 求结构的许可荷载[P]。

解: (1) 由节点 A 的平衡可知:

$$\sum X = -N_1 \sin 30^\circ + N_2 \sin 60^\circ = 0$$

$$\sum Y = N_1 \cos 30^\circ + N_2 \cos 60^\circ - P = 0$$

$$\therefore \begin{cases} N_1 = 0.866P \\ N_2 = 0.5P \end{cases} \quad (7 \text{分})$$



(2) 强度计算

由 AB 杆的强度条件:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{N_1}{A_1} \leq [\sigma]_1 \\ \Rightarrow P &\leq \frac{A_1 [\sigma]_1}{0.866} = \frac{\pi \times d_1^2 [\sigma]_1}{0.866 \times 4} = \frac{\pi \times 40^2 \times 80}{4 \times 0.866} = 116.03 \text{kN} \end{aligned} \quad (8 \text{分})$$

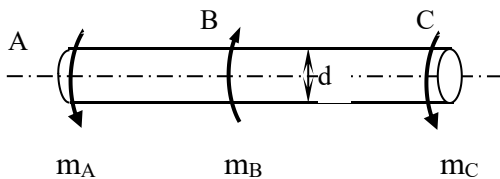
由 AC 杆的强度条件:

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \frac{N_2}{A_2} \leq [\sigma]_2 \\ \Rightarrow P &\leq \frac{A_2 [\sigma]_2}{0.5} = \frac{\pi}{4 \times 0.5} \times d_2^2 [\sigma]_2 = \frac{\pi}{4 \times 0.5} \times 25^2 \times 160 = 157 \text{kN} \end{aligned} \quad (8 \text{分})$$

$$\therefore [P] = \min\{[P]_1, [P]_2\} = 116.03 \text{kN} \quad (2 \text{分})$$

2、(25分)图示受扭圆轴,直径  $d=40\text{mm}$ ,  $m_A=0.4\text{KN}\cdot\text{m}$ ,  $m_B=0.9\text{KN}\cdot\text{m}$ ,  $m_C=0.5\text{KN}\cdot\text{m}$ ,  $G=80\text{GPa}$ ,

$[\tau]=100\text{MPa}$ ,  $[\varphi]=1^\circ/\text{m}$ 。试校核该轴的强度与刚度。



解:

(1) 由扭矩分析可知

$$T_{\max} = 0.5 \text{ KN}\cdot\text{m} \quad (7 \text{ 分})$$

强度校核:

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t} = \frac{0.5 \times 10^6 \times 16}{\pi \times 40^3} = 39.81 \text{ MPa} < [\tau] \quad (8 \text{ 分})$$

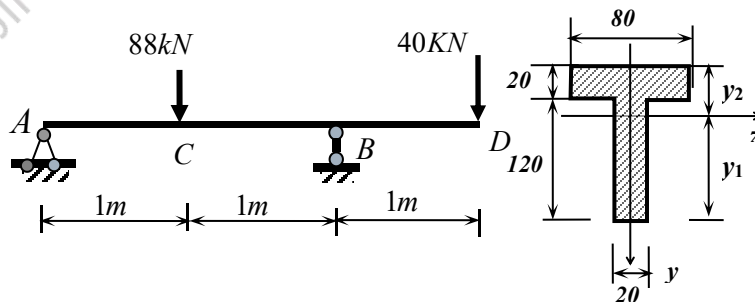
刚度校核

$$\varphi_{\max} = \frac{T_{\max}}{GI_p} \times \frac{180}{\pi} = \frac{0.5 \times 10^6 \times 32 \times 180 \times 10^3}{80 \times 10^3 \times \pi^2 \times 40^4} = 1.43^\circ / \text{m} > [\varphi] \quad (8 \text{ 分})$$

综上, 圆轴强度条件满足而刚度条件不满足, 故不能安全工作。(2分)

3、(35分) 铸铁梁的截面形状尺寸、所受外力及弯矩图如下图所示。已知  $z$  为形心轴,  $y_1=153.6\text{mm}$ ,  $y_2=96.4\text{mm}$ , 惯性矩  $I_z=1017 \times 10^5 \text{ mm}^4$ , 材料许可拉应力  $[\sigma_t]=40\text{MPa}$ , 许可压应力  $[\sigma_c]=100\text{MPa}$ , 许用剪应力  $[\tau]=30\text{MPa}$ 。

- (1) 作梁的剪力弯矩图;
- (2) 试校核梁的强度。

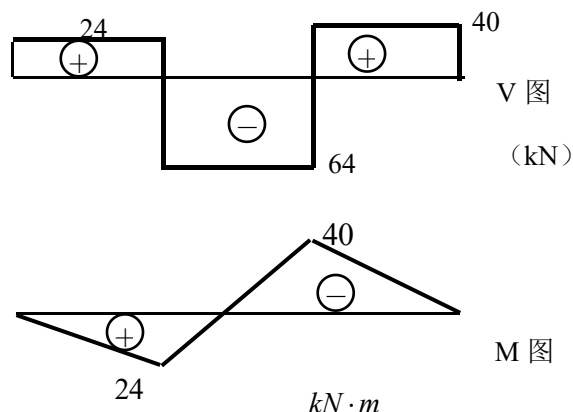


解: (1) 作剪力弯矩图 (10分)

(2) 校核正应力强度

由弯矩图可知: 梁的正应力强度的危险截面为 C、B 截面,  $M_C=24\text{kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_B=-40\text{kN}\cdot\text{m}$ 。(2分)

(1) 校核全梁截面上的拉应力强度:



$$\sigma_{tC} = \frac{M_C y_1}{I_Z} = \frac{24 \times 10^6 \times 153.6}{1017 \times 10^5} = 36.24 \text{MPa} \quad (3 \text{分})$$

$$\sigma_{tB} = \frac{M_B y_2}{I_Z} = \frac{40 \times 10^6 \times 96.4}{1017 \times 10^5} = 37.92 \text{MPa} \quad (3 \text{分})$$

$$\sigma_{t\max} = \sigma_{tB} = 37.92 \text{MPa} < [\sigma_t] = 40 \text{MPa} \quad \text{梁抗拉强度合格。} \quad (2 \text{分})$$

(2) 校核全梁截面上的压应力强度：全梁截面最大值压应力必定发生在 B 截面下边缘。(1 分)

$$\sigma_{cB} = \frac{M_B y_1}{I_Z} = \frac{40 \times 10^6 \times 153.6}{1017 \times 10^5} = 60.41 \text{MPa} < [\sigma_c] = 160 \text{MPa} \quad (4 \text{分})$$

梁抗压强度合格。(1 分)

由剪力图可知：梁的剪应力危险截面为 CB 段截面， $|V|_{\max} = 64 \text{kN}$  (2 分)

(3) 校核全梁截面上的剪应力强度：

$$\tau_{\max} = \frac{|V|_{\max} (S_z^*)_{\max}}{I_Z \times b} = \frac{64 \times 10^3 \times 20 \times 153.6 \times 153.6 / 2}{101.7 \times 20} = 7.42 \text{MPa} < [\tau] \quad (5 \text{分})$$

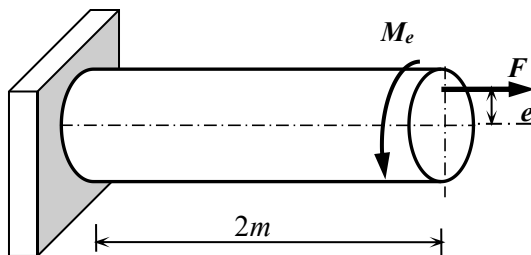
故梁的剪应力强度合格。(1 分)

综上，梁的强度满足。(1 分)

4、(35 分)如图实心圆截面杆，受偏向拉力  $F$  及扭转力偶矩  $M_e$  共同作用，已知杆直径  $d=80 \text{mm}$ ， $F=100 \text{kN}$ ， $M_e=5 \text{kN}\cdot\text{m}$ ，偏心距  $e=20 \text{mm}$ ，材料的弹性模量  $E=200 \text{GPa}$ ，泊松比  $\nu=0.3$ 。求：

(1) 画出危险点的应力状态，并求该点的主应力大小；

(2) 若材料的许用应力  $[\sigma]=160 \text{MPa}$ ，试按第三强度理论校核杆的强度。



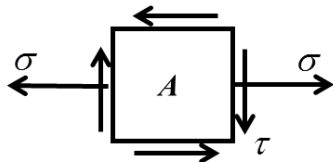
解：(1) 杆件内力

$$N = F = 100 \text{kN}$$

$$M = Fe = 2\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$T = M_e = 5\text{kN}\cdot\text{m} \quad (6 \text{分})$$

杆件中的危险点在杆件的上边缘线上，其单元体如图



(2分)

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W_z} = \frac{100 \times 10^3 \times 4}{\pi \times 80^2} + \frac{2 \times 10^6 \times 32}{\pi \times 80^3} = 60\text{MPa} \quad (8 \text{分})$$

$$\tau = \frac{T}{W_t} = \frac{5 \times 10^6 \times 16}{\pi \times 80^3} = 50\text{MPa} \quad (4 \text{分})$$

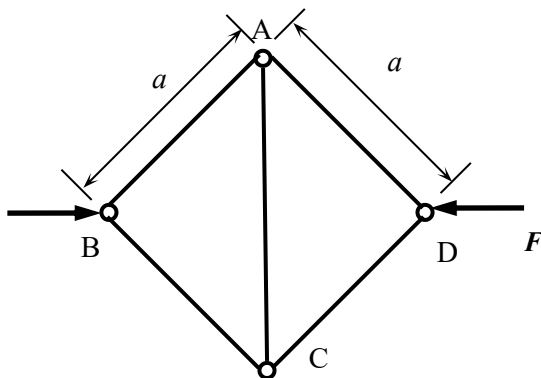
$$\sigma_{ps} = \begin{cases} \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{60}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{60}{2}\right)^2 + 50^2} \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 88 \\ -28 \\ 0 \end{cases} \quad (5 \text{分})$$

$$\sigma_1 = 88\text{MPa} \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -28\text{MPa} \quad (3 \text{分})$$

$$(2) \sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{60^2 + 4 \times 50^2} = 116\text{MPa} < [\sigma] \quad (5 \text{分})$$

强度满足。 (2分)

5、(30分) 图示正方形桁架结构由5根钢杆组成，长度  $a=1.5\text{m}$ 。各杆的直径均为  $d=40\text{mm}$ ，材料均为 Q235 钢，弹性模量  $E=206\text{GPa}$ ， $[\sigma]=160\text{MPa}$ ，材料的判别柔度  $\lambda_p=100$ ， $\lambda_s=60$ ，稳定安全系数  $n_{st}=2$ ，非细长杆临界应力公式  $\sigma_{cr} = 240 - 0.00682\lambda^2$  (MPa)。当  $F=60\text{kN}$  时，校核结构的安全性。



解：(1) 求各杆轴力：

$$N_{AC} = F = 60 \text{ kN} \quad (\text{拉力}) \quad (4 \text{ 分})$$

$$N_{AB} = N_{BC} = N_{CD} = N_{DA} = \frac{\sqrt{2}F}{2} = 42.4 \quad (\text{压力}) \quad (4 \text{ 分})$$

(2) 校核拉杆强度

$$\sigma_{AC} = \frac{N_{AC}}{A} = \frac{60 \times 10^3 \times 4}{\pi \times 40^2} = 47.8 \text{ MPa} < [\sigma] = 160 \quad (6 \text{ 分})$$

故 EB 杆强度满足。 (1 分)

(3) 校核压杆的稳定性

$$\text{柔度: } \lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1500}{40/4} = 150 > \lambda_p \quad \text{故可用欧拉公式计算其临界力。} \quad (6 \text{ 分})$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^3 \times \frac{\pi}{64} \times 40^4 \times 10^{-3}}{1500^2} = 113.4 \text{ kN} \quad (5 \text{ 分})$$

$$N_{AC} = 42.4 \text{ kN} < [N_{CD}] = \frac{P_{cr}}{n_{st}} = 56.7 \text{ kN} \quad (2 \text{ 分})$$

故压杆稳定性安全 (1 分)

结构安全 (1 分)

## 《材料力学》冲刺卷 2 答案

1、(30分) 钢杆 AB、CD 吊一刚性横梁 AD。已知钢杆的弹性模量  $E=200\text{GPa}$ ，两杆的横截面积均为  $100\text{mm}^2$ ，荷载  $P=24\text{kN}$ ，试求 (1) 两杆的应力，(2) 两杆的轴向变形，(3) 荷载  $P$  作用点的竖向位移。

解：(1) 两杆的轴力：

$$\begin{aligned} N_{AB} + N_{CD} &= P \\ N_{AB} \times 3 - N_{CD} \times 2 &= 0 \end{aligned}$$

解得：
$$\begin{aligned} N_{AB} &= 16\text{kN} \\ N_{CD} &= 8\text{kN} \end{aligned} \quad (5\text{分})$$

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A} = \frac{16 \times 10^3}{100} = 160\text{MPa} \quad (5\text{分})$$

$$\sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{A} = \frac{8 \times 10^3}{100} = 80\text{MPa} \quad (5\text{分})$$

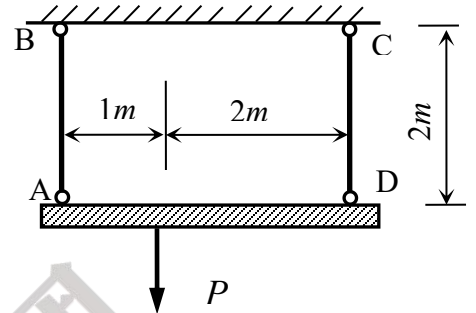
(2) 两杆的轴向变形

$$\Delta l_{AB} = \frac{N_{AB} l_{AB}}{EA} = \frac{16 \times 10^3 \times 2 \times 10^3}{200 \times 10^3 \times 100} = 1.6\text{mm} \quad (5\text{分})$$

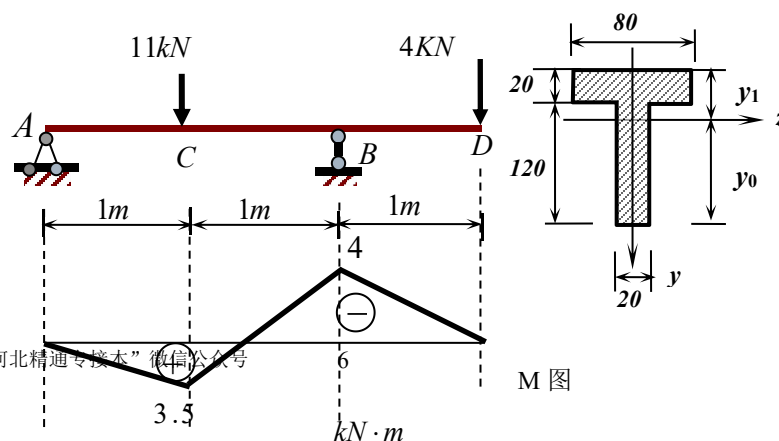
$$\Delta l_{CD} = \frac{N_{CD} l_{CD}}{EA} = \frac{8 \times 10^3 \times 2 \times 10^3}{200 \times 10^3 \times 100} = 0.8\text{mm} \quad (5\text{分})$$

(3) 横梁为刚性杆

$$\Delta l_P = \Delta l_{CD} + \frac{2}{3}(\Delta l_{AB} - \Delta l_{CD}) = 1.33\text{mm} \quad (5\text{分})$$



2、(30分) 铸铁梁的截面形状尺寸、所受外力及弯矩图如下图所示。已知  $z$  为形心轴，材料许用拉应力  $[\sigma_t]=30\text{MPa}$ ，许用压应力  $[\sigma_c]=90\text{MPa}$ ，试校核梁的强度。



解:

(1) 横截面的几何数据

$$y_1 = \frac{20 \times 80 \times 10 + 120 \times 20 \times (60 + 20)}{20 \times 80 + 20 \times 120} = 88 \text{ mm}$$

$$y_2 = 140 - 88 = 52 \text{ mm} \quad (4 \text{ 分})$$

$$I_z = \frac{80 \times 20^3}{12} + 80 \times 20 \times (140 - 88 - 10)^2 + \frac{20 \times 120^3}{12} + 20 \times 120 \times (88 - 60)^2 = 764 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

(4 分)

(2) 作梁的弯矩图如上图示, 由图可知, B、C 截面的弯矩分别为:

$$M_B = M_{\max}^- = 4 \text{ KN}\cdot\text{m} \quad M_C = M_{\max}^+ = 3.5 \text{ KN}\cdot\text{m} \quad (4 \text{ 分})$$

(3) 正应力强度校核

B 截面校核

$$\sigma_{t,\max,B} = \frac{M_B y_2}{I_z} = \frac{4 \times 10^6 \times 52}{764 \times 10^4} = 27.2 \text{ MPa} < [\sigma_t] \quad (4 \text{ 分})$$

$$\sigma_{c,\max,B} = \frac{M_B y_1}{I_z} = \frac{4 \times 10^6 \times 88}{764 \times 10^4} = 46.1 \text{ MPa} < [\sigma_c] \quad (4 \text{ 分})$$

C 截面校核

$$\sigma_{t,\max,C} = \frac{M_C y_1}{I_z} = \frac{3.5 \times 10^6 \times 88}{764 \times 10^4} = 40.3 \text{ MPa} > [\sigma_t] \quad (4 \text{ 分})$$

$$\sigma_{c,\max,C} = \frac{M_C y_2}{I_z} = \frac{3.5 \times 10^6 \times 52}{764 \times 10^4} = 23.8 \text{ MPa} < [\sigma_c] \quad (4 \text{ 分})$$

综上, 梁的正应力强度条件不满足。 (2 分)

3、(25 分) 试做图示梁的剪力图和弯矩图。

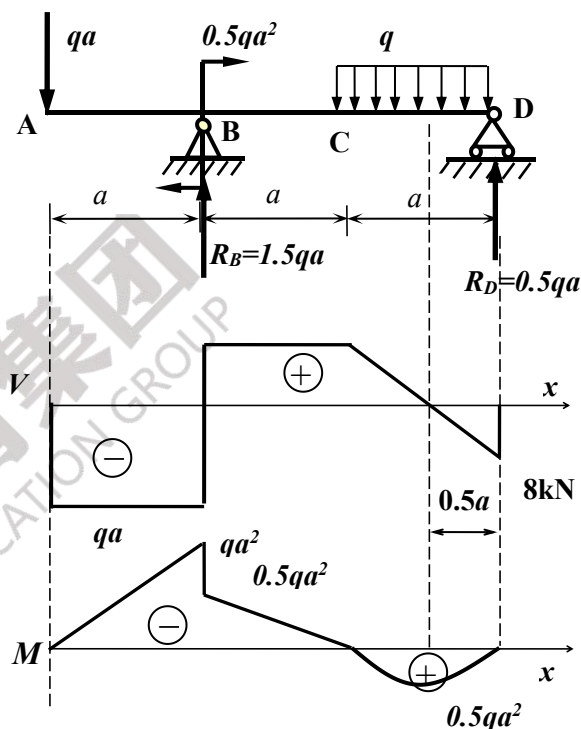
解：1) 求支反力

$$R_B = 1.5qa$$

$$R_C = 0.5qa \quad (3 \text{ 分})$$

2) 作剪力图如右 (6 分)

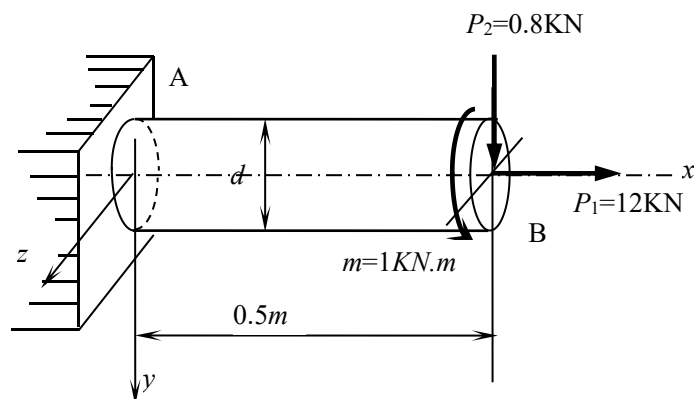
3) 作弯矩图如右 (6 分)



4、(35 分) 如图所示的等截面圆杆，已知  $P_1=12kN$ ，

$P_2=0.8kN$ ， $m=1kN.m$ ，直径  $d=40mm$ ，

$[\sigma]=160MPa$ 。试用第三强度理论校核该圆杆的强度。



解：

(1) 构件的内力方程

轴力方程：



$$N(x) = P_1 = 12kN \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (3 \text{ 分})$$

扭矩方程:

$$T(x) = m = 1kN.m \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (3 \text{ 分})$$

弯矩方程

$$M(x) = -P_2(0.5 - x) = 0.8(x - 0.5)KN.m \quad (0.5 \leq x \leq 1) \quad (3 \text{ 分})$$

(2) 从内力方程可知: 危险截面为 A 截面, 危险点为上边缘点。 (2 分)

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_A}{W_z} = \frac{4 \times P_1}{\pi \times d^2} + \frac{P_2 \times 0.5 \times 32}{\pi \times d^3} = \frac{4 \times 12 \times 10^3}{\pi \times 40^2} + \frac{0.8 \times 0.5 \times 10^6 \times 32}{\pi \times 40^3} = 73.25MPa$$

(10 分)

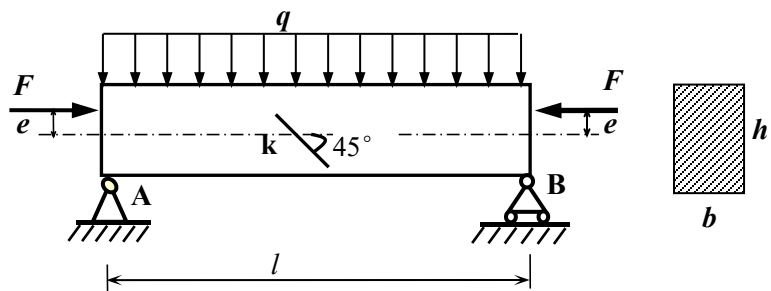
$$\tau = \frac{T_A}{W_p} = \frac{m \times 16}{\pi \times d^3} = \frac{1 \times 10^6 \times 16}{\pi \times 40^3} = 79.61MPa \quad (6 \text{ 分})$$

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{73.25^2 + 4 \times 79.61^2} = 175.26MPa > [\sigma] \quad (6 \text{ 分})$$

故构件不满足第三强度条件。 (2 分)

5、(30 分) 矩形截面梁受力如图。已知梁上的均布荷载  $q=20kN/m$ , 偏心压力  $F=1500kN$ , 偏心距  $e=80mm$ , 跨度  $l=2m$ , 截面尺寸  $b=240mm$ ,  $h=500mm$ , 弹性模量  $E=20GPa$ , 泊松比  $\nu=0.3$ 。求

(1) 跨中截面 k 点沿  $45^\circ$  方向的线应变; (2) 跨中截面下边缘点沿轴向的线应变  $\epsilon$ 。



解: (1) 跨中截面内力:

$$\text{轴力: } N = -1500kN$$

$$\text{剪力: } V=0$$

$$M = Pe + \frac{1}{8}ql^2 = 1500 \times 80 \times 10^{-3} + \frac{1}{8} \times 20 \times 2^2 = 130 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

弯矩:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{-1500 \times 10^3}{240 \times 500} = -12.5 \text{ MPa}$$

所以 k 点为单向受力状态, 且

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 90^\circ = -6.25 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{-45^\circ} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos(-90^\circ) = -6.25 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{-45^\circ} = \frac{1}{E} (\sigma_{-45^\circ} - \nu \sigma_{45^\circ}) = \frac{(1-0.3) \times (-6.25)}{20 \times 10^3} = -2.19 \times 10^{-4}$$

(2) 跨中截面下边缘处于单向应力状态

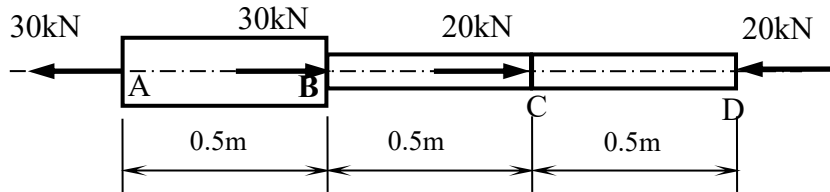
$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M}{W_z} = \frac{-1500 \times 10^3}{240 \times 500} + \frac{130 \times 10^6 \times 6}{240 \times 500^2} = 0.5 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{0.5}{20 \times 10^3} = -0.25 \times 10^{-4}$$

## 《材料力学》冲刺卷 3 答案

1. (30分) 已知图示拉压杆,  $A_1=500\text{mm}^2$ ,  $A_2=200\text{mm}^2$ ,  $E=200\text{GPa}$ 。试:

1) 作出杆件的轴力图; 2) 求各段的正应力; 3) 求杆件的总变形量。



解: 1)

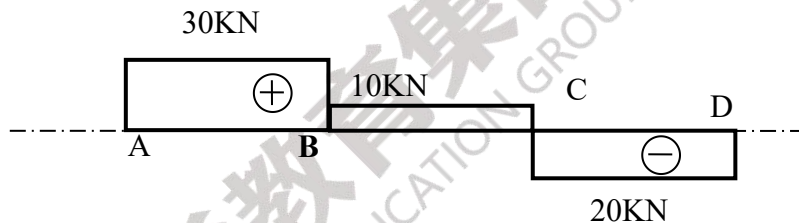
杆件各段的轴力分别为:

$$N_{AB}=30\text{kN} \text{ (拉)}$$

$$N_{BC}=10\text{kN} \text{ (拉)}$$

$$N_{CD}=20\text{kN} \text{ (压)}$$

(10分)



轴力图如右。

2) 各段正应力分别为:

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A_{AB}} = \frac{30 \times 10^3}{500} = 60\text{MPa} \quad (4 \text{分})$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A_{BC}} = \frac{10 \times 10^3}{200} = 50\text{MPa} \quad (4 \text{分})$$

$$\sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{A_{CD}} = \frac{-20 \times 10^3}{200} = -100\text{MPa} \quad (4 \text{分})$$

3) 杆件的总变形为:

$$\begin{aligned} \Delta l_{AD} &= \frac{N_{AB} l_{AB}}{EA_{AB}} + \frac{N_{BC} l_{BC}}{EA_{BC}} + \frac{N_{CD} l_{CD}}{EA_{CD}} \\ &= \frac{30 \times 10^3 \times 500}{200 \times 10^3 \times 500} + \frac{10 \times 10^3 \times 500}{200 \times 10^3 \times 200} + \frac{-20 \times 10^3 \times 500}{200 \times 10^3 \times 200} \\ &= 0.15 + 0.125 - 0.25 \\ &= 0.025\text{mm} \end{aligned} \quad (8 \text{分})$$

2、(25分) 试做图示梁的剪力图和弯矩图。

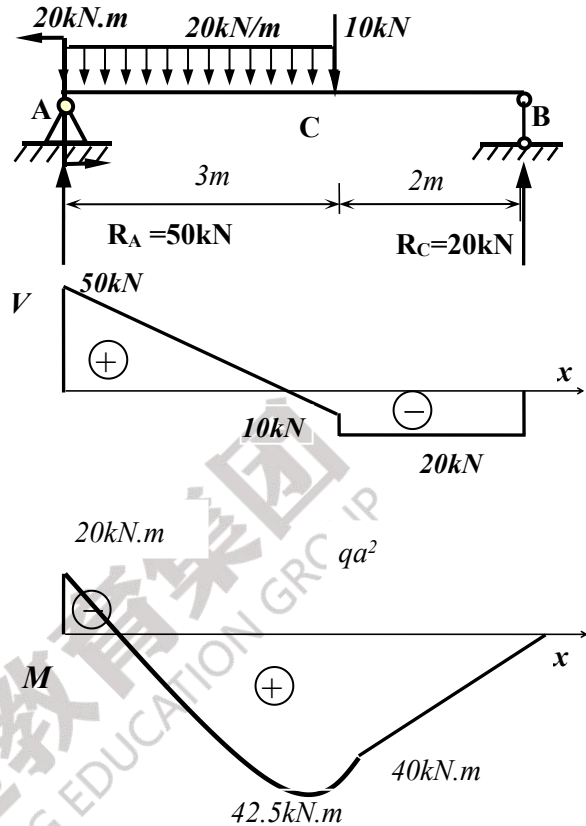
解：1) 求支反力

$$R_A = 50\text{kN}$$

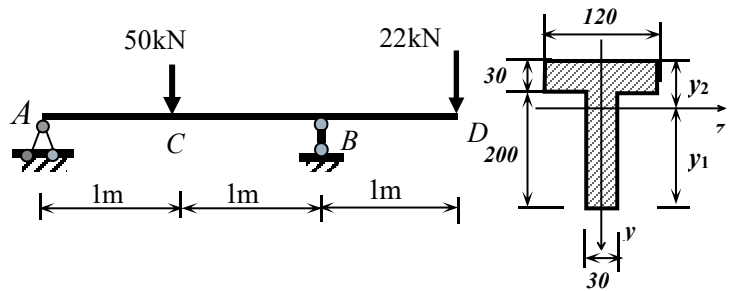
$$R_C = 20\text{kN} \quad (5\text{分})$$

2) 作剪力图如右 (10分)

3) 作弯矩图如右 (10分)



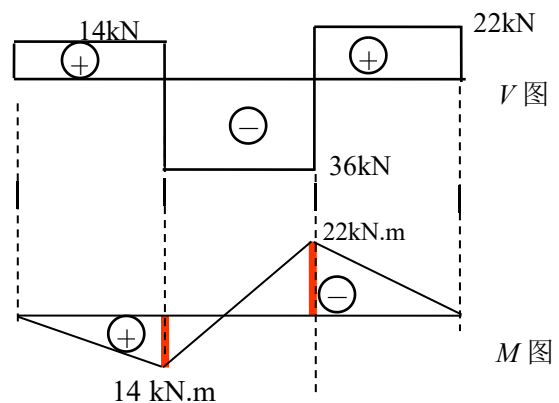
3、(35分) 铸铁梁的截面形状尺寸、所受外力及弯矩图如下图所示。已知  $z$  为形心轴， $y_1=143\text{mm}$ ， $y_2=87\text{mm}$ ，惯性矩  $I_z=50 \times 10^6\text{mm}^4$ ，材料许可拉应力  $[\sigma_t]=45\text{MPa}$ ，许可压应力  $[\sigma_c]=120\text{MPa}$ ，许用剪应力  $[\tau]=30\text{MPa}$ 。试校核梁的正应力和剪应力强度。



3、(35分)

解：(1) 作梁的剪力与弯矩图 (8分)

由弯矩图可知：梁的正应力强度的危险截面为 C、B 截面， $M_C=24\text{kN.m}$ ， $M_B=-40\text{kN.m}$ 。(2分)



(2) 校核全梁截面上的拉应力强度:

$$\sigma_{tB} = \frac{M_B y_2}{I_Z} = \frac{22 \times 10^6 \times 87}{50 \times 10^6} = 38.28 \text{MPa} < [\sigma_t] \quad (5 \text{分})$$

$$\sigma_{tC} = \frac{M_C y_1}{I_Z} = \frac{14 \times 10^6 \times 143}{50 \times 10^6} = 40.04 \text{MPa} < [\sigma_t] \quad (5 \text{分})$$

(3) 校核全梁截面上的压应力强度: 全梁截面最大值压应力必定发生在 B 截面下边缘。(2 分)

$$\sigma_{cB} = \frac{M_B y_1}{I_Z} = \frac{22 \times 10^6 \times 143}{50 \times 10^6} = 62.92 \text{MPa} < [\sigma_c] = 100 \text{MPa} \quad (5 \text{分})$$

(3) 由剪力图可知: 梁的剪应力危险截面为 CB 段截面,  $|V|_{\max} = 36 \text{kN}$  (2 分)

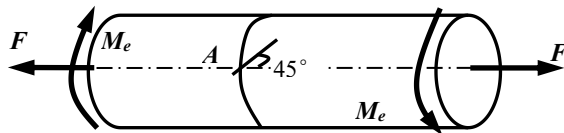
校核全梁截面上的剪应力强度:

$$\tau_{\max} = \frac{|V|_{\max} (S_z^*)_{\max}}{I_Z \times b} = \frac{36 \times 10^3 \times 30 \times 143 \times 143 / 2}{50 \times 10^6 \times 30} = 7.36 \text{MPa} < [\tau] \quad (5 \text{分})$$

综上, 梁的强度满足。(1 分)

4、(35 分) 实心圆截面杆, 受轴向拉力  $F$  及扭转力偶矩  $M_e$  共同作用, 已知杆直径  $d=100 \text{mm}$ ,  $F=200 \text{kN}$ ,  $M_e=10 \text{kN}\cdot\text{m}$ , 材料的弹性模量  $E=200 \text{GPa}$ , 泊松比  $\nu=0.3$ 。求:

- (1) 若材料的许用应力  $[\sigma]=160 \text{MPa}$ , 试按第三强度理论校核杆的强度;
- (2) 圆杆表面 A 点沿  $45^\circ$  方向的线应变。

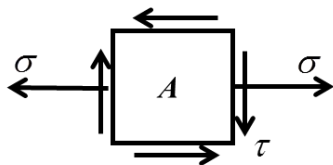


解: (1) 杆件内力

$$N = F = 200 \text{kN}$$

$$T = M_0 = 10 \text{kN}\cdot\text{m} \quad (4 \text{分})$$

杆件中的危险点的单元体如图



(2分)

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{200 \times 10^3 \times 4}{\pi \times 100^2} = 25.48 \text{MPa} \quad (5分)$$

$$\tau = \frac{T}{W_t} = \frac{10 \times 10^6 \times 16}{\pi \times 100^3} = 50.96 \text{MPa} \quad (5分)$$

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{25.48^2 + 4 \times 50.96^2} = 105.06 \text{MPa} < [\sigma] \quad (5分)$$

强度满足。 (2分)

(2) A点应力单元图见上图

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} \cdot \cos(90^\circ) - \tau \sin(90^\circ) = \frac{\sigma}{2} - \tau = -38.22 \text{MPa} \quad (5分)$$

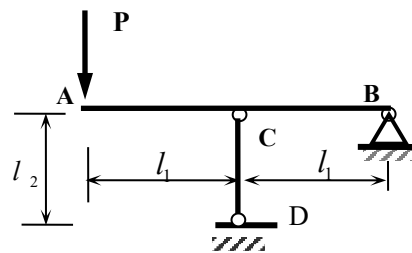
$$\sigma_{-45^\circ} = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} \cdot \cos(-90^\circ) - \tau \sin(-90^\circ) = \frac{\sigma}{2} + \tau = 63.7 \text{MPa} \quad (5分)$$

$$\varepsilon_{45^\circ} = \frac{1}{E} (\sigma_{45^\circ} - \nu \cdot \sigma_{-45^\circ}) = \frac{-38.22 - 0.3 \times 63.7}{200 \times 10^3} = -2.87 \times 10^{-4} \quad (4分)$$

5、(25分) 图示结构中，AB为刚性杆件，CD杆为矩形截面杆件，截面宽度  $b=20\text{mm}$ ，高度  $h=30\text{mm}$ ，材料的弹性模量  $E=200\text{GPa}$ ，判别柔度  $\lambda_p=100$ ，中长杆的经验公式为：

$\sigma_{cr}=235-0.0068\lambda^2$ ，稳定安全系数  $n_{st}=2$ ，已知  $P=25\text{kN}$ ， $l_1=1.2\text{m}$ ，

$l_2=0.6\text{m}$ 。试确定结构的安全性。



解：(25分)

对 CD 柱：  $N_{CD} = 2F = 50\text{kN}$  (压)，需进行稳定性计算。 (5分)

$$\text{柔度： } \lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{600}{20/2\sqrt{3}} = 103.9 > \lambda_p \quad \text{故可用经验公式计算其临界力。} \quad (5分)$$

分)

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^3 \times 20 \times 30}{103.9^2} = 109.6 \text{ kN} \quad (9 \text{ 分})$$

$$N_{CD} = 50 \text{ kN} < [N_{AD}] = \frac{N_{cr}}{n_{st}} = 54.8 \text{ kN} \quad (4 \text{ 分})$$

故结构安全。 (2 分)



## 《材料力学》冲刺卷 4 答案

1、(30分) 一阶梯型实心圆轴受力及尺寸如图所示, 已知  $d_1=40\text{mm}$ ,  $d_2=80\text{mm}$ ,  $G=80\text{GPa}$ ,

求:

(1) 作轴的扭矩图; (2) 轴内的最大剪应力; (3) AC 两截面间的相对扭转角。

解: (1) 作扭矩图 (10分)

(2) BC 段最大剪应力

$$\tau_{\max 1} = \frac{T_{\max 1}}{W_{t1}} = \frac{1 \times 10^6}{\frac{\pi \times 40^3}{16}} = 79.62 \text{MPa} \quad (4 \text{分})$$

AB 段最大剪应力

$$\tau_{\max 2} = \frac{T_{\max 2}}{W_{t2}} = \frac{2 \times 10^6}{\frac{\pi \times 80^3}{16}} = 19.90 \text{MPa} \quad (4 \text{分})$$

$$\tau_{\max} = 79.62 \text{MPa} \quad (2 \text{分})$$

(3) AC 截面相对扭转角

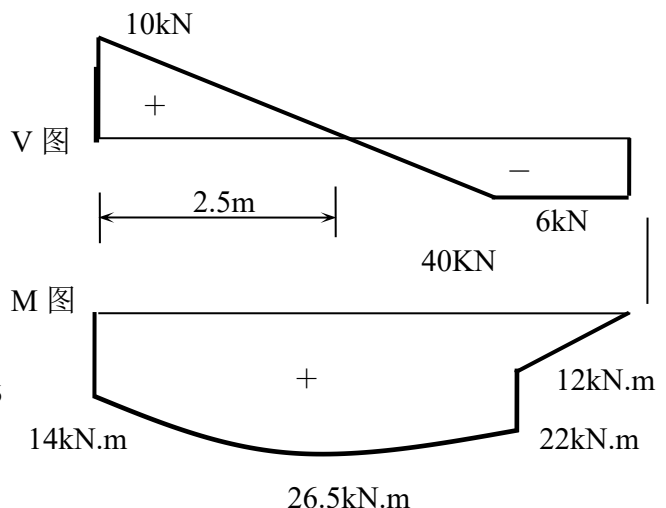
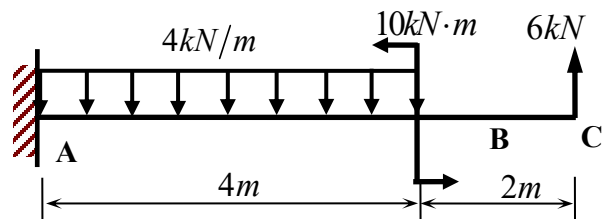
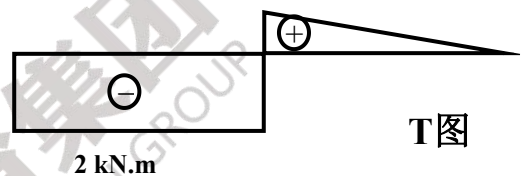
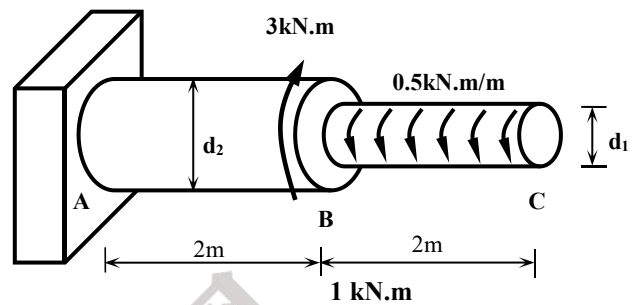
$$\begin{aligned} \phi_{AC} &= \phi_{AB} + \phi_{BC} = \frac{T_2 l_2}{GI_{P2}} + \int_0^2 \frac{0.5x \times 10^6}{GI_{P1}} dx \\ &= \frac{-2 \times 10^6 \times 2 \times 10^3 \times 32}{80 \times 10^3 \times \pi \times 80^4} + \frac{0.5 \times 10^6 \times 2 \times 10^3 \times 32}{80 \times 10^3 \times \pi \times 40^4} = 0.037 \end{aligned} \quad (10 \text{分})$$

2、(25分) 试做图示梁的剪力图和弯矩图。

解:

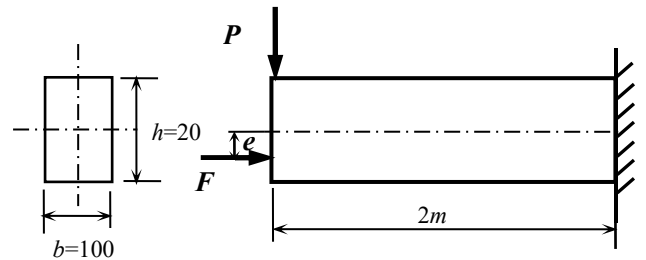
1) 作剪力图如右 (12分)

2) 作弯矩图如右 (13分)





3、(30分) 矩形截面悬臂梁受力如图，已知材料的许用正应力  $[\sigma]=160\text{MPa}$ ，外力  $P=40\text{kN}$ ， $F=200\text{kN}$ ， $e=60\text{mm}$ 。校核该梁的强度。



3、(30分)

解：梁的轴力  $N=200\text{kN}$  (4分)

最大弯矩  $N=Pl+Fe=92\text{kN.m}$ 。(6分)

危险截面在固定端，危险点在该截面的上边缘。(2分)

$$\sigma_{M,\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{92 \times 10^6 \times 6}{100 \times 200^2} = 138\text{MPa} \quad (6\text{分})$$

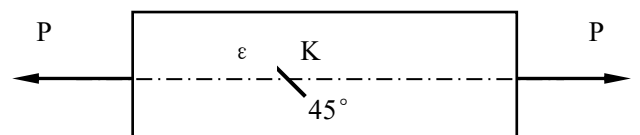
$$\sigma_{N,\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{200 \times 10^3}{100 \times 200} = 10\text{MPa} \quad (6\text{分})$$

危险点为单向应力状态：

$$\sigma_{\max} = \sigma_{M,\max} + \sigma_{N,\max} = 138 + 10 = 148\text{MPa} < [\sigma] \quad (4\text{分})$$

所以，梁的强度满足。(2分)

4、(25分) 如图所示，由实验测得拉伸试件上点 K 沿与轴线成  $45^\circ$  方向的线应变  $\varepsilon$ ，试求此时试件所受拉力 P。已知试件的横截面面积 A，材料的弹性模量 E 和泊松比  $\mu$ 。



解：由题意可知

K 点所在截面轴力

$$N=P \quad (2\text{分})$$

$$\text{正应力: } \sigma = \frac{P}{A} \quad (\text{单向拉伸应力状态}) \quad (5\text{分})$$

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos(90^\circ) - \tau_x \sin(90^\circ) = \frac{\sigma}{2} \quad (5\text{分})$$

$$\sigma_{-45^\circ} = \frac{\sigma}{2} \quad (5 \text{ 分})$$

$$\varepsilon_{-45^\circ} = \frac{1}{E}(\sigma_{-45^\circ} - \mu \cdot \sigma_{45^\circ}) = \frac{1-\mu}{2E} \cdot \sigma = \frac{1-\mu}{2E} \frac{P}{A} \quad (6 \text{ 分})$$

$$\therefore P = \frac{2EA\varepsilon}{1-\mu} \quad (2 \text{ 分})$$

5、(35分) 如图所示结构，AB 杆和 BC 梁材料相同，均为 Q235 钢。CB 梁为矩形截面梁，受均布荷载作用；AB 杆为圆截面杆，两端均为球铰链。已知：CB 梁截面  $h=100\text{mm}$ ,  $b=80\text{mm}$ ；AB 杆直径  $d=80\text{mm}$ ，材料的  $\sigma_p=200\text{MPa}$ ,  $\sigma_s=240\text{MPa}$ ,  $\sigma_b=400\text{MPa}$ ,  $E=200\text{GPa}$ ,  $a=304\text{MPa}$ ,  $b=1.12\text{MPa}$ 。若规定的稳定安全系数  $[n_w]=5$ ,  $[\sigma]=160\text{MPa}$ 。试确定结构的许可荷载  $q$  值。

解：(35分)

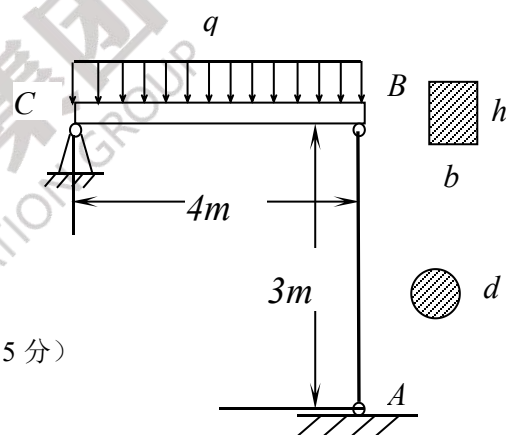
(1) 研究 BC 梁

$$\text{BC 梁的最大弯矩 } M_{\max}^+ = \frac{1}{8}ql^2 = 2q\text{kN} \cdot \text{m} \quad (5 \text{ 分})$$

弯曲正应力校核

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{2q \times 10^6 \times 6}{80 \times 100^2} \leq [\sigma_c] = 160 \quad (5 \text{ 分})$$

$$q \leq 10.7 \text{ kN/m} \quad (3 \text{ 分})$$



(2) 对 AB 柱：  $N_{AD} = 2q\text{kN}$ (压)，需进行稳定性计算。 (2分)

$$\text{判别柔度 } \lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = 100 \quad (5 \text{ 分})$$

$$\text{柔度： } \lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{3000}{80/4} = 150 > \lambda_p \quad \text{故可用欧拉公式计算其临界力。} \quad (5 \text{ 分})$$

$$P_{cr} = A \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{1}{4} \times \pi \times 80^2 \times \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^3}{150^2} = 440.3\text{kN} \quad (5 \text{ 分})$$

$$N_{AB} = 2qkN < [N_{AD}] = \frac{P_{cr}}{[n_w]} = 88.1kN \quad (2 \text{分})$$

$$q \leq 44 \text{ kN/m} \quad (2 \text{分})$$

综上,  $[q] = 10.7 \text{ kN/m}$  (1分)

