第三章限时练习

一，选择题

1—5ADADC　　6—8CABDD

二，填空题

1， $x-\frac{1}{3}x^3+C(x\in[-1,1])$　　**2，** x　　**3,** $\frac{1}{2}$　　**4,** 0　　**5,** $\frac{1}{2}$

三，计算题

1， $\int\frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}dx$

$= -\int\cos^2\frac{1}{x}d\frac{1}{x}$

$=-\int\frac{1+\cos\frac{2}{x}}{2}d\frac{1}{x}$

$=-\frac{1}{2}\int\cos\frac{2}{x}d\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\int 1d\frac{1}{x}$

$=-\frac{1}{4}\int\cos\frac{2}{x}d\frac{2}{x}-\frac{1}{2x}$

$=-\frac{1}{4}\sin\frac{2}{x}-\frac{1}{2x}+C$

2， $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}dx$

$=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x(1-\sin^2 x)}dx$

$=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x}\left|\cos x\right|dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\cos xdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\sin x}\cos xdx$

$=\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$=\frac{4}{3}$

3， 解：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}dx$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^2+1}dx$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^2+1}d(x+1)$

$$=\arctan(x+1)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\arctan(x+1)-\lim_{x\to-\infty}\arctan(x+1)$$

$$=\pi$$

$\therefore$收敛

4 解：绕 x 轴旋转：$V=\pi\int_0^1 (x^2)^2dx=\frac{1}{5}\pi x^5\Big|_0^1=\frac{\pi}{5}$

绕 y 轴旋转：$V=\pi\int_0^1 1-(\sqrt{y})^2 dy=\frac{\pi}{2}$

5，解：令 $F(x)=2x-\int_0^x f(t)dt-1$

很明显 $F(x)$ 在闭区间[0,1]上连续在开区间（0,1）上可导

并且 $F(0)=-1<0$　　$F(1)=2-\int_0^1 f(t)dt-1>2-\int_0^1 1dt-1=0$

又因为 $F'(x)=2-f(x)$ 且 $f(x)<1$ 则 $F'(x)>0$ 即 $F(x)$ 单调递增

所以由零点定理并且单调递增得 $F(x)$ 在区间（0,1）只有一个实根